

Matière : **Algèbre**
Section : **I1**
Année scolaire : **2014/2015**

Enseignant : **F. Durand**
Durée : **1 heure 30**
Date : **17 juin 2015**
Nombre de pages : **2**
Calculatrice **non** autorisée

Documents **non** autorisés

Le barème est volontairement sur 25 et la note sera laissée sur 25. On prendra soin de bien justifier. Bon courage !

Exercice 1 (*) (3 points)

Effectuer la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre k (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^{k+1}) avec :

$$A(X) = 1 - 2X + X^3 + X^4, \quad B(X) = 1 + 2X + X^2 \quad \text{et} \quad k = 2$$

Exercice 2 (*) (5 points)

Calculer le pgcd D des polynômes A et B ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $AU + BV = D$ où :

$$A(X) = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2 \quad \text{et} \quad B(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$$

Exercice 3 (*) (4 points)

Décomposer les fractions suivantes en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

1. $F(X) = \frac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}$

2. $G(X) = \frac{X}{(X^2 + 1)(X^2 + 4)}$

Exercice 4 (*) (4 points)

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, -1, i)$, $v_2 = (-1, i, 1)$, $v_3 = (i, 1, -1)$ forment une base de \mathbb{C}^3 .

2. Calculer les coordonnées de $v = (1+i, 1-i, i)$ dans cette base.

Exercice 5 ()** (4 points)

Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -1, -2)$ et F celui engendré par $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 6 ()** (5 points)

Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et F le sous espace vectoriel de E des suites convergentes : $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}$.

1. Montrer que l'ensemble F_1 des suites constantes et l'ensemble F_2 des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces vectoriels de F .
2. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans F .

Indication : Pour une suite (u_n) qui converge vers un réel l regarder la suite $(u_n - l)$.