Matière : **Algèbre**
Section : **I1**
Année scolaire : **2014/2015**

Documents **non** autorisés

Enseignant : **F. Durand**
Durée : **1 heure 30**
Date : **28 mai 2015**
Nombre de pages : **1**
Calculatrice **non** autorisée

Les notations sont sont celles du cours. Le barême est volontairement sur 24 et la note sera laissée sur 24. On prendra soin de bien justifier. Bon courage !

Exercice 1 (4 points)

Dans $\mathbb{C}$, on définit la relation binaire $\Re$ par $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\ z\Re z' \Leftrightarrow |z|=|z'|$.

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de chaque $z\in\mathbb{C}$.

Exercice 2 (6 points)

Dans $\mathbb{R}^+$, on donne la relation binaire notée $\Re$ définie par :

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2,\ x\Re y \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{Q}^*, x=y^\alpha .$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2. Préciser les classes d'équivalences de 0, de 1 et de 2.

Exercice 3 (4 points)

Dans $\mathbb{R}$, on donne la relation binaire notée $\Re$ définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\Re y \Leftrightarrow f(x)\le f(y)$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone.

Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

Exercice 4 (6 points)

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (muni de $f+g$ et $\lambda.f$ usuels). Soit F l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'une des quatre conditions suivantes :

1) $f(0)+f(1)=0$
2) $\forall x\in[0,1],\ f(x)\ge 0$
3) $f(1/2)=1/4$
4) $\forall x\in[0,1],\ f(x)+f(1-x)=0$

Dans quel cas F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 5 (4 points)

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Montrer que $E_1\cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E.