Matière : **Algèbre**
Section : **I1**
Année scolaire : **2014/2015**

Documents **non** autorisés

Enseignant : **F. Durand**
Durée : **1 heure 30**
Date : **30 avril 2015**
Nombre de pages : **1**
Calculatrice **non** autorisée

Les notations sont sont celles du cours. On traitera les exercices dans l'ordre souhaité. On prendra soin de bien justifier. Le barême est indicatif. Bon courage !

Exercice 1 (2 points)

Soient E et F deux ensembles et $f:E\rightarrow F$ et $g:F\rightarrow G$ deux applications.
Démontrer les deux propriétés suivantes :
1. Si $g\circ f$ est injective, alors f est injective
2. Si $g\circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 2 (5 points + 2 points bonus)

Soient $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ l'application qui, à tout entier $n\in\mathbb{N}$ associe $2n$ et $g:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ l'application qui, à tout entier $n\in\mathbb{N}$ associe $n/2$ si n est pair et $(n-1)/2$ sinon.

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f et g .
2. Déterminer $g\circ f$ et $f\circ g$.
3. (Bonus) Soit $n\in\mathbb{N}$. On note f^n la composée de f avec elle-même n fois. Par exemple, $f^3=f\circ f\circ f$ et $f^0=id$. Déterminer $(g\circ f)^n$ et $(f\circ g)^n$.

Exercice 3 (6 points)

Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$ puis vérifier que f réalise une bijection de I sur $J=f(I)$ puis préciser f^{-1} :

1. $f(x)=x^2-4x+3$, $I=]-\infty,2]$.
2. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$, $I=]-2,+\infty[$.

Exercice 4 (4 points)

Soient A et B des parties d'un ensemble E . Démontrer que :

1. $(A\Delta B=A\cap B)\Leftrightarrow(A=B=\emptyset)$
2. $(A\Delta C=B\Delta C)\Leftrightarrow(A=B)$

Exercice 5 (3 points)

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $A_n=]n;n+1]$. Déterminer $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ et $\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n$.