Matière : **Algèbre**
Section : **I2**
Année scolaire : **2014/2015**
Documents **non** autorisés

Enseignant : **F. Durand**
Durée : **1 heure 30**
Date : **11 mai 2015**
Calculatrice **autorisée**

Les notations sont sont celles du cours et des TD. On prendra soin de bien justifier. Le barême est indicatif. Vous pouvez tout faire. Bon courage !

Exercice 1 (15 points)

On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t)=2x(t)+3y(t)+e^t \\ y'(t)=3x(t)+2y(t)+t \end{cases} \quad \text{avec} \quad t\in[0,+\infty[\ ,$$

et x et y des fonctions inconnues, définies sur $[0,+\infty[$ dérivables et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Donner une écriture matricielle du système $X'(t)=AX(t)+B(t)$, en explicitant les éléments A , B , $X(t)$ et $X'(t)$.

2. Résoudre le système homogène (sans second membre).

3. a) Résoudre le système complet, par la méthode de variation des constantes.

3. b) À quelle condition une solution générale $X(t)$ (c'est-à-dire une solution du système complet) est-elle bornée ? Déterminer alors $\lim_{t\to+\infty} X(t)$.

3. c) Donner la solution X(t) ayant pour conditions initiales $x(0)=2$ et $y(0)=1$.

4. En utilisant le travail fait précédemment, déterminer l'unique solution de l'équation différentielle suivante : $\varphi''(t)=2\varphi'(t)+3\varphi(t)+e^t$ avec $t\in[0,+\infty[$

et φ est une fonction inconnue, définie sur $[0,+\infty[$ deux fois dérivable, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions initales suivantes $\varphi(0)=1$ et $\varphi'(0)=2$.

Exercice 2 (5 points)

Soit le système linéaire : $\begin{cases} 2x+my=5 \\ (m+1)x+3y=7 \end{cases}$

où $m\in\mathbb{R}$ est un paramètre et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est un vecteur inconnu.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $m\in\mathbb{R}$ le système est-il de Cramer ?

2. Pour le(s) valeur(s) de $m\in\mathbb{R}$ trouvée(s), résoudre le système grâce aux formules de Cramer.