Matière : **Algèbre**
Section : **I2**
Année scolaire : **2014/2015**
Documents **non** autorisés

Enseignant : **F. Durand**
Durée : **1 heure 30**
Date : **17 juin 2015**
Calculatrice **autorisée**

On prendra soin de bien justifier. Le barême est volontairement sur 25 et la note sera laissée sur 25. Vous pouvez tout faire. Bon courage !

Exercice 1 (5 points)

Soit $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le plan vectoriel d'équation $x-y+2z=0$ dans la base canonique.

1. Déterminer une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^{\perp}$

2. En déduire naturellement une base orthonormée de $E=\mathbb{R}^3$ et la matrice de passage P de la base canonique vers la base orthornormée obtenue. Quelle propriété particulière vérifie la matrice P ?

3. En déduire les matrices A et B des projections orthogonales sur F et $F^{\perp}$, dans la base canonique.

Note : pour la dernière question, si votre calculatrice ne fait pas de calcul matriciel, mettez surtout l'accent sur la méthode. Le but n'est pas de vérifier que vous savez multiplier des matrices à la main...

Exercice 2 (4 points)

Soient $E=R_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels et $a_0,\dots,a_n$ des nombres réels distincts. Montrer que l'application $(P,Q)\rightarrow\langle P,Q\rangle=\sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$ définit un produit scalaire sur E .

Exercice 3 (5 points)

Soient $E=R_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels.

1. Montrer que l'application $(P,Q)\rightarrow\langle P,Q\rangle=P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur E .
Indication : on utilisera le résultat de l'exercice 2.

2. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $(1,X,X^2)$ dans $E=R_2[X]$ muni du produit scalaire décrit ci-dessus.

Exercice 4 (5 points) (Distance, hors des sentiers battus).

Soit $\overrightarrow{OM}=(x_0, y_0, z_0)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ et de la norme euclidienne $\|.\|$ usuels, et P le plan vectoriel d'équation $ax+by+cz=0$ ($\vec{n}=(a,b,c)\neq(0,0,0)$ étant un vecteur normal à P).

Note : on comprendra que O est l'origine d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ où $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et M est un point de coordonnées (x_0,y_0,z_0) dans ce repère. L'exercice n'est pas long, il est juste guidé. Faire un dessin sera fort utile !

1. Décomposer à l'aide de la relation de Chasles le vecteur $\overrightarrow{OM}$ à l'aide du point H, projeté orthogonal du point M sur le plan P .

2. Utiliser cette décomposition pour exprimer $|\langle\overrightarrow{OM},\vec{n}\rangle|$ en fonction de la distance MH et de $\|\vec{n}\|$.

3.a) En déduire que la distance $d(\overrightarrow{OM},P)$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ au plan P vérifie :
$$d(\overrightarrow{OM},P)=\frac{|\langle\overrightarrow{OM},\vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|}\ .$$

3.b) Exprimer alors $d(\overrightarrow{OM},P)$ en fonction de a,b,c,x_0,y_0,z_0 .

4. Généraliser la formule à la dimension $n\in\mathbb{N}^*$: calculer la distance de $\overrightarrow{OM}=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ à l'hyperplan P d'équation $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$.

Exercice 5 (6 points)

1. Etudier et tracer la courbe paramétrées définie par : $\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos^3 t \\ y(t)=\sin^3 t\end{array}, t\in\mathbb{R}\right\}$.

On passera par toutes les étapes vues en cours et TD (recherche de périodicité, symétrie, réduction d'intervalle d'études, variations, étude des points singuliers éventuels, branches infinies éventuelles...).

2. Pour tout réel $t\neq 0[mod\,\pi/2]$, on note $A(t)$ et $B(t)$, les points d'intersection des axes (Ox) et (Oy) avec la tangente à la courbe au point de paramètre t de la courbe précédente. Calculer la distance $A(t)B(t)$.