

Mathématiques 2^{nde} - Activité récapitulative sur les fonctions

Un champ rectangulaire a pour longueur 50 m et pour largeur 20 m. On diminue sa longueur de x mètres et on augmente sa largeur de x mètres. On se propose d'étudier comment varie son aire lorsque x varie dans l'intervalle $[0; 50]$.

On appelle f la fonction, définie sur cet intervalle, qui à x associe l'aire en m^2 du champ.

1. Pour tout $x \in [0; 50]$, exprimer $f(x)$ en fonction de x et calculer $f(0)$, $f(10)$, $f(30)$, $f(50)$.
2. Tracer sur la calculatrice, la représentation graphique de la fonction f .
3. En utilisant la touche TRACE de la calculatrice, déterminer graphiquement une valeur approchée du maximum de f sur son domaine de définition. Déterminer de même pour quelle valeur approchée de x ce maximum est atteint.
4. Déterminer, par lecture graphique, pour quelles valeurs de x on a : $f(x) \geq 1000$.

L'objet des trois questions suivantes est de trouver la valeur exacte du maximum de f et de la valeur exacte de x pour lequel il est atteint.

5. Vérifier que, pour tout $x \in [0; 50]$: $f(x) = 1225 - (x - 15)^2$
Indication : utiliser au choix l'une des deux méthodes suivantes :
 - i) Développer l'expression de $f(x)$ trouvée dans la question 1 et la mettre sous forme canonique en utilisant la deuxième identité remarquable (méthode vue en exercices).
 - ii) Développer l'expression $1225 - (x - 15)^2$ ainsi l'expression de $f(x)$ trouvée dans la question 1 et constater que ces deux expressions sont égales.
6. Dédire de la question précédente que, pour tout $x \in [0; 50]$: $f(x) \leq 1225$.
Indication : montrer d'abord que pour tout $x \in [0; 50]$: $f(x) - 1225 \leq 0$.
7. En reprenant l'expression de $f(x)$ donnée dans la question 5, résoudre formellement (c'est-à-dire par le calcul) l'équation $f(x) = 1225$.
En déduire la valeur exacte du maximum de f et pour quelle valeur exacte de x il est atteint. Quelle est alors l'allure du champ ?
8. A l'aide de la représentation graphique tracée sur calculatrice et de la question 7, préciser sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est croissante, puis décroissante.
9. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
10. Tracer la courbe représentative de f .
Indication : à l'aide de la calculatrice afficher d'abord un tableau de valeur de la fonction pour x variant de 0 à 50 par pas de 5 (choisir donc 0 pour le début de la table et 5 pour le pas). Tracer la courbe sur papier millimétré en prenant en abscisse 1cm pour 5 mètres et en ordonnée 1 cm pour 100 m^2 . Placer tous les points M de coordonnées $(x; f(x))$ avec x variant de 0 à 50 par pas de 5. Relier les points en donnant un aspect lisse à la courbe.