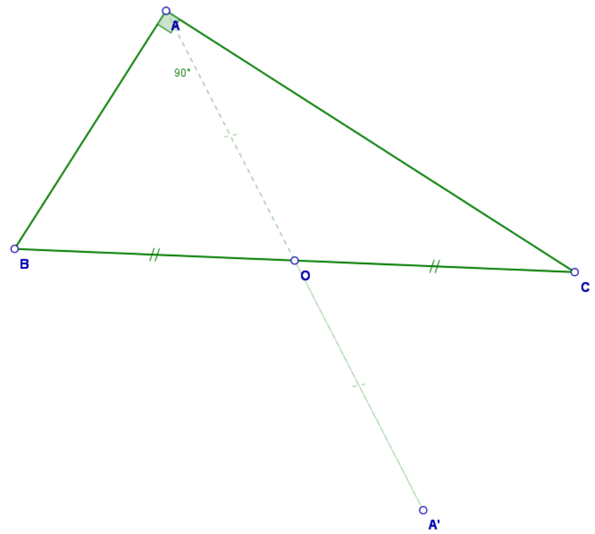
Activité 2 : du triangle rectangle au cercle - démonstration

Dans l'activité précédente, on a émis la conjecture suivante : **« Si un triangle est rectangle, alors son cercle circonscrit a pour centre le milieu de son hypoténuse ».** C'est ce qu'on va démontrer.



I. Démonstration de la conjecture

On considère un triangle ABC rectangle en A, et on veut démontrer que le milieu 0 de son hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit.

Sur la figure ci-dessus, on a construit le point A' symétrique du point A par rapport à O.

1. Démontrer que le quadrilatère ABA'C est un parallélogramme.
2. Démontrer alors que le quadrilatère ABA'C est un rectangle.
3. Démontrer que AA' = BC.
4. En déduire que OA = OB = OC. A quelles droites appartient le point O ?
5. Conclure et donner la formulation équivalente : « **Si un triangle est ….............., alors le …........... de son hypoténuse est le …......... de son cercle circonscrit.** »

II. Conséquence et autres formulations de cette propriété

1. a. Utiliser la propriété démontrée en **I.**, pour démontrer que la longueur de la médiane [OA] relative à l'hypoténuse [BC] est la moitié de la longueur de l'hypoténuse : $OA=\frac{1}{2}BC$.

   b. Énoncer la propriété ainsi démontrée : **« Si un triangle est …............, alors la …............... relative à l'.......................... mesure la moitié de la longueur de l'.......................... . »**

2. Compléter les autres formulations suivantes : **« Si un triangle est …..............., alors :**
   - il est inscrit dans un demi-cercle dont le …................. est son........................ ;
   - le cercle circonscrit a pour diamètre l' …....................... ;
   - la médiane relative à l'hypoténuse est le …............... du …........... .... ;
   - le sommet de l'angle …........ appartient au cercle de diamètre l'..................... »

3. Voyez-vous encore d'autres formulations de cette propriété ?