# Khôlle PCSI n° 1 : nombres complexes

Cours : Énoncer et démontrer les formules d'Euler
+ énoncer la transformation de a cos x + b sin x.

Exercices :

1. Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $z=\frac{3+5i}{5-3i}$ .
2. Soit $(a,b,z)\in\mathbb{C}^3$ avec $|a|=|b|=1$ et $a\neq b$ . On définit $Z=\frac{z+ab\bar{z}-a-b}{a-b}$ .
   Montrer que $Z^2\in\mathbb{R}_-$ .
3. Soient $(\alpha,\theta)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$ . Simplifier $I_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\alpha+k\theta)$ .
4. Développer $\cos 4x$ suivant les puissances de $\cos x$ .

Cours : Énoncer et démontrer la formule de Moivre
+ énoncer le résultat des racines n^ème de l'unité (quelles sont les racines ?)

Exercices :

1. Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $z=(2-i)^3$ .
2. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\leq 1$ et $z\neq 1$ . Montrer que $\Re\left(\frac{1}{1-z}\right)\geq\frac{1}{2}$ .
3. Soient $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ . Simplifier $J_n=\sum_{k=0}^{n-1}k\sin(k\theta)$ .
4. Linéariser $\sin^4 x$ .

Cours : Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes
+ énoncer les formules de duplication.

Exercices :

1. Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}$ .
2. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|=1$ et $z\neq 1$ . Montrer que $i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\in\mathbb{R}$ .
3. Soient $\theta\in\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$ et $n\in\mathbb{N}^*$ . Simplifier $K_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k\theta)}{\cos^k(\theta)}$ .
4. Linéariser $\cos^2 x\sin^3 x$