Khôlle PCSI n° 2 : nombres complexes et trigonométrie, rudiments de logique

<u>Cours</u> : Énoncer et démontrer le résultat sur les racines carrées d'un nombre complexe.
+ énoncer sans la démontrer l'écriture complexe d'une rotation ce centre 0 et d'angle θ .
<u>Exercices</u> :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: a) $(z+i)^n=(z-1)^n$ où $n\in\mathbb{N}^*$, b) $2z^2-iz+1=0$, c) $z^2=1+i\sqrt{2}$
2. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble Ω .
   Démontrer l'équivalence $A\subset B\Leftrightarrow \overline{B}\subset\overline{A}$. *Indication : Raisonner par équivalence en explicitant ce que signifie* $A\subset B$ *, puis prendre la contraposée.*
3. Écrire à l'aide de quantificateurs la négation de : $\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R}, f(x)>f(y)$
4. On considère trois points deux à deux distincts A, B et C, d'affixes a, b et c.
   a) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A si et seulement si $(c-a)^2+(b-a)^2=0$.
   b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit équilatéral.

<u>Cours</u> : Démontrer le résultat suivant : $\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2, (e^z=e^{z'}\Leftrightarrow z-z'\in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z})$.
+ Quelle transformation du plan est associée à l'application $z\to kz$ avec $k\in\mathbb{R}^*$?
<u>Exercices</u> :

1. Résoudre : a) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n+\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n=1$ où $n\in\mathbb{N}^*$, b) $4z^2+12iz-9=0$, c) $z^2=2+i$
2. Soient $A_1,\dots,A_n$, n sous-ensembles d'un ensemble Ω . Soit ω un élément de Ω .
   Retranscrire mathématiquement les propositions suivantes :
   a) ω appartient à tous les A_i .   b) ω appartient à au moins l'un des A_i .
3. Écrire à l'aide de quantificateurs la négation de : $\exists M\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}, |f(x)|\leq M$
4. A tout point M d'affixe $z\neq 1$, on associe M' d'affixe z' tel que $z'=\dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$.
   a) Établir que $|z'|=1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}\in\mathbb{R}$ et $\dfrac{z'+1}{z-1}\in i\mathbb{R}$.
   b) En déduire une construction géométrique de M' connaissant M .

<u>Cours</u> : Énoncer et démontrer le résultat sur le module et l'argument de l'exponentielle complexe.
+ Donner sans démontrer les solutions de l'équation $z^n=re^{i\theta}$ avec $r>0$, $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.
<u>Exercices</u> :

1. Résoudre : a) $z^n=\overline{z}$ où $n\in\mathbb{N}^*$, b) $z^2=-3+4\mathrm{i}$, c) $z^2+(-2+2\mathrm{i})z+(3-6\mathrm{i})=0$
2. Écrire à l'aide de quantificateurs la négation de : « la fonction f est nulle sur $]0,+\infty[$. »
3. Soit f l'application du plan P dans lui-même, qui à tout point M d'affixe $z\neq 1$, associe le point $N=f(M)$ d'affixe $Z=\dfrac{2+iz}{z-1}$. On note $z=x+iy$ et $Z=X+iY$.
   a) Calculer X et Y en fonction de x et y
   b) Déterminer l'ensemble E des points M tels que Z soit réel.
   c) Montrer que E est un cercle privé d'un point, donner son centre et son rayon.
4. Soient A, B et C, trois points d'affixe a, b et c.
   a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a+jb+j^2c=0$.
   b) On construit 3 triangles équilatéraux de bases [AB], [AC] et [BC], à l'extérieur du premier.
   Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.