Khôlle PCSI n° 3 : rudiments de logique, ensembles, ensembles de réels

1. Mettre entre les propriétés i. et ii. suivantes le bon symbole parmi $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$.
   i. n est multiple de 2 ii. (n est multiple de 4 ou n est multiple de 6)

2. Écrire symboliquement l'énoncé : « Tout réel est encadré par deux entiers consécutifs. »

3. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble Ω .
   Montrer les égalités d'ensembles : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (lois de Morgan).

4. Montrer, en utilisant la caractérisation de la partie entière, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1$.

5. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées.
   i. Montrer que $A \subset B \Rightarrow (\sup A \leq \sup B) \text{ et } (\inf B \leq \inf A)$. La réciproque est-elle vraie ?
   ii. Montrer que $A \cup B$ est bornée, puis déterminer $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$.
   iii. Que dire pour $A \cap B$?

---

1. Mettre entre les propriétés i. et ii. suivantes le bon symbole parmi $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$.
   i. $z \in \mathbb{C}$ ii. $\exists (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, z = r e^{i\theta}$

2. Écrire symboliquement l'énoncé : « La partie entière d'un réel est le plus grand entier relatif qui lui est inférieur ou égal. »

3. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble Ω . Simplifier les expressions suivantes :
   $E = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cap \overline{B})$ et $F = (A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

4. Soient x et y deux réels. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$. *On posera* $x = \lfloor x \rfloor + a$ *et* $y = \lfloor y \rfloor + b$ *, en précisant dans quel(s) intervalle(s) se trouvent a et b.*

5. Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure, et s'ils existent le minimum et le maximum de l'ensemble : $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \,/\, (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$.

---

1. Mettre entre les propriétés i. et ii. suivantes le bon symbole parmi $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$.
   i. $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ii. $\sin\theta = 1$

2. Écrire symboliquement l'énoncé : « La valeur absolue d'un réel est la plus grande des deux valeurs définies par ce réel et son opposé. »

3. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble Ω . Montrer l'égalité :
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de l'intersection par rapport à l'union).

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\lfloor x+y \rfloor$ vaut soit $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, soit $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
   Préciser la situation lorsque x=y.

5. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $D_A = \{ |x-y| \,/\, (x, y) \in A^2 \}$ l'ensemble des distances entre deux éléments de A.
   i. Montrer que D_A est majorée. On note $\delta(A)$ sa borne supérieure (c'est le **diamètre** de A).
   ii. Montrer que $\delta(A) = \sup A - \inf A$.
   iii. Soit B une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ telle que $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est bornée puis que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.