## Khôlle PCSI n° 4 : fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ – 10 octobre 2013

1. Que signifie le fait qu'une fonction f est bijective d'un domaine I sur un domaine J ?
2. Déterminer l'ensemble de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction $f : x \to e^x \ln(\sin x)$ .
3. Étudier la fonction $f : x \to \ln\left|\frac{x+3}{x-1}\right|$ (domaines de définition et de dérivabilité, variations, branches infinies).
4. Montrer que $\forall x>0, x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$

---

1. Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$ . Quelle est l'équation de la tangente à f en a ?
2. Déterminer l'ensemble de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction $f : x \to \ln\left(\frac{x^x-1}{x^x+1}\right)$ .
3. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et dérivables en $a \in I$ .
   Déterminer $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$ .
4. Compléter l'énoncé suivant : « Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une bijection. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors $f^{-1}$ est dérivable sur I et …......................... .
   Donner l'interprétation géométrique ce résultat.
   Retrouver alors l'expression de la dérivée de la fonction Arctan.

---

1. Si f est dérivable sur I, g est dérivable sur J et $f(I) \subset J$ , que dire de $g \circ f$ ?
2. Déterminer l'ensemble de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction $f : x \to \operatorname{Arctan} x + 2 \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ .
   Calculer f(0) et en déduire la valeur de f pour tout x du domaine de définition.
3. Montrer que $\forall x \in R, |\sin x| \leq |x|$ .
4. Étudier $f : x \to \frac{2x+1}{x-1}$ (domaines de définition et dérivabilité, variations, branches infinies) .
   Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque. Étudier alors $f^{-1}$