Khôlle PCSI n° 5 : fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ – 17 octobre 2013

Sujet 1

1. Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $sh\, x \geq x$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ch\, x \geq 1+\frac{x^2}{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{Arccos}(x)=\text{Arcsin}(2x)$.
3. Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} ch(kx)=\frac{ch\left(\frac{nx}{2}\right)sh\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{sh\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Sujet 2

1. Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sin x \leq x$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1-\frac{x^2}{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ch\, x=2$.
3. Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$, avec $1<a<b$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\text{Arctan}(sh\, x)|=\text{Arccos}\left(\frac{1}{ch\, x}\right)$

Sujet 3

1. Comparer $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^x)^x$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x)}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{Arcsin}\left(\frac{\tan x}{2}\right)=x$.
3. Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}}$, avec $a>1$.
4. Montrer que $\forall x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercices Bonus

1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle argument principal de z, l'unique $\theta \in]-\pi,\pi]$ tel que $z=|z|e^{i\theta}$.
   Montrer que si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, alors $\theta=2\,\text{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ avec $x=\Re(z)$ et $y=\Im(z)$.
2. Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. A quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal ?
3. Les réels x et y étant liés par $x=\ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$, calculer ch x et sh x en fonction de y.