Corrigé du DM n° 2

DM n° 2 : Exercices 51, 53, 54 et 56 page 110 du manuel Abscisse de Magnard édition 2004

Exercice 51 page 110

Soit ABC un triangle. On considère le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

1. Déterminer les coordonnées des points D et E tels que $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc dans la base $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$ sont $\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$.

A est l'origine du repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$, donc dans ce repère, le point D a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Pour trouver les coordonnées du point E dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$, il suffit de trouver les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AE}$. Cherchons donc à décomposer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ dans la base $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$:

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$ (d'après la relation de Chasles)

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=(1-\frac{1}{3})\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Dans la base $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$, le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

Donc dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$, le point E a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

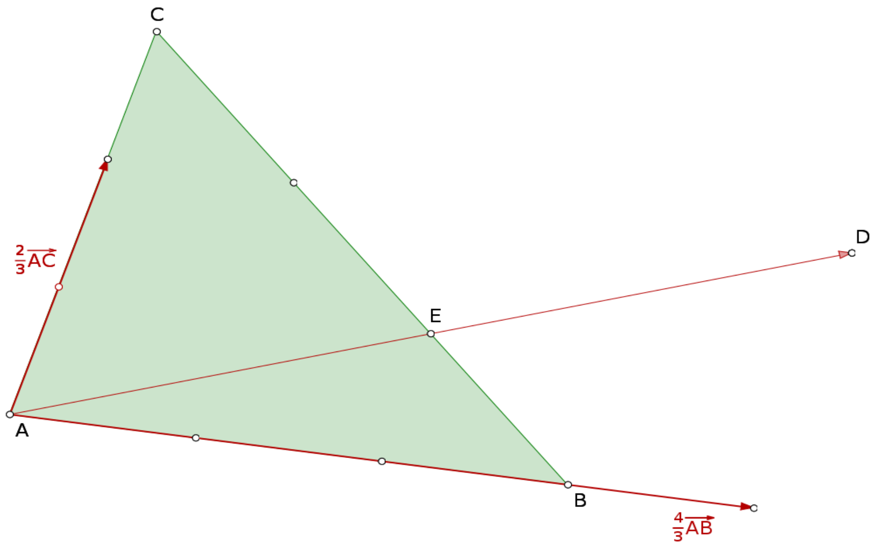
2. Montrer que E est milieu de [AD].

Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$, le point A a pour coordonnées (0; 0) et le point D $\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Le milieu du segment [AD] a donc pour coordonnées :

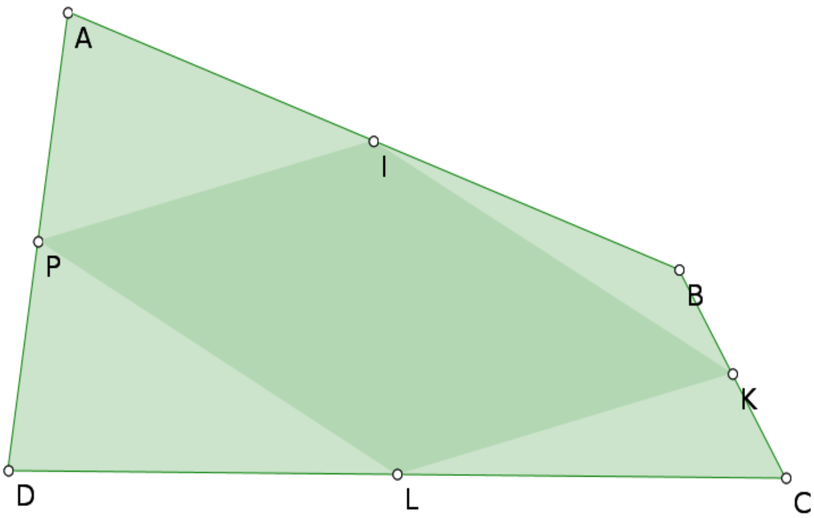
$$\left(\frac{x_A+x_D}{2};\frac{y_A+y_D}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}(0+\frac{4}{3});\frac{1}{2}(0+\frac{2}{3})\right)=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$$.

Il s'agit des coordonnées de E, donc E est le milieu de [AD].



Exercice 53 page 110

ABCD est un quadrilatère quelconque.
I est le milieu du segment [AB],
K est le milieu du segment [BC],
L est le milieu du segment [CD],
P est le milieu du segment [DA].
On se place dans le repère $(D;\vec{DC};\vec{DA})$.



1. Déterminer les coordonnées des points A, C, D, P et L puis celles de I et K en fonctions de celles de B $(x_B;y_B)$.

Dans le repère $(D;\vec{DC};\vec{DA})$,
D a pour coordonnées (0; 0),
C a pour coordonnées (1; 0),
A a pour coordonnées (0; 1),
P a pour coordonnées (0; ½) en tant que milieu de [DA],
L a pour coordonnées (½; 0) en tant que milieu de [DC],

Soit $(x_B;y_B)$ le couple des coordonnées du point B. Alors :
I a pour coordonnées $\left(\frac{x_B}{2};\frac{1+y_B}{2}\right)$ en tant que milieu de [AB],
K a pour coordonnées $\left(\frac{x_B+1}{2};\frac{y_B}{2}\right)$ en tant que milieu de [BC],

2. Déterminer la nature du quadrilatère IKLP.

On cherche à montrer qu'il s'agit d'un parallélogramme. Pour cela montrons par exemple que $\vec{IK}=\vec{PL}$.
Le vecteur $\vec{IK}$ a pour coordonnées $(x_K-x_I;y_K-y_I)=\left(\frac{x_B+1}{2}-\frac{x_B}{2};\frac{y_B}{2}-\frac{1+y_B}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$,
Le vecteur $\vec{PL}$ a pour coordonnées $(x_L-x_P;y_L-y_P)=\left(\frac{1}{2}-0;0-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.
Ainsi $\vec{IK}=\vec{PL}$, donc IKPL est un parallélogramme.

Autres méthodes : on pouvait aussi montrer que $\vec{IP}=\vec{KL}$ ou encore que les diagonales [PK] et [IL] se coupent en leur milieu.

Exercice 54 page 110

Soit ABCD un parallélogramme. On se place dans le repère $(A\,;\vec{AB}\,;\vec{AD})$ **.**

1. Soit E le point défini par $\vec{BE}=\frac{2}{3}\vec{AB}$ **.Déterminer les coordonnées de E.**

Exprimons $\vec{AE}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.

$$\vec{AE}=\vec{AB}+\vec{BE}=\vec{AB}+\frac{2}{3}\vec{AB}=\left(1+\frac{2}{3}\right)\vec{AB}=\frac{5}{3}\vec{AB}$$

Or on a $\vec{AB}(1;0)$. D'où $\vec{AE}\left(\frac{5}{3};0\right)$, puis $E\left(\frac{5}{3};0\right)$.

2. Soit F le point défini par $2\vec{CF}+3\vec{BF}=\vec{0}$ **.Déterminer les coordonnées de F.**

Exprimons $\vec{AF}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$. Pour cela insérons le point A dans l'égalité de vecteurs ci-dessus, à l'aide de la relation de Chasles.

$$2(\vec{CA}+\vec{AF})+3(\vec{BA}+\vec{AF})=\vec{0}$$
$$2\vec{CA}+2\vec{AF}+3\vec{BA}+3\vec{AF}=\vec{0}$$
$$5\vec{AF}=3\vec{AB}+2\vec{AC}=3\vec{AB}+2(\vec{AB}+\vec{BC})=3\vec{AB}+2\vec{AB}+2\vec{BC}=5\vec{AB}+2\vec{AD} \quad \text{car} \quad \vec{BC}=\vec{AD}$$.

D'où : $\vec{AF}=\vec{AB}+\frac{2}{5}\vec{AD}$.

Donc le vecteur $\vec{AF}$ a pour coordonnées $\left(1\,;\frac{2}{5}\right)$. Ainsi le point F a pour coordonnées $\left(1\,;\frac{2}{5}\right)$.

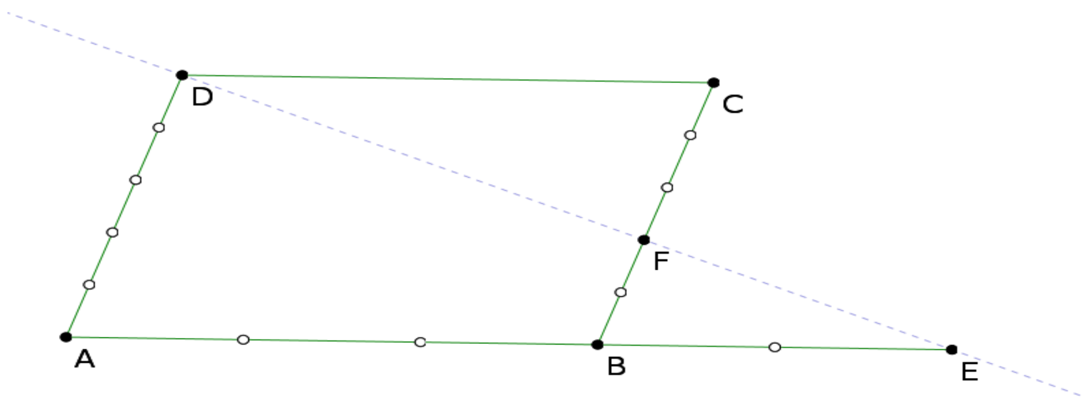
3. Montrer que les points D, E et F sont alignés.

Montrons par exemple que les vecteurs $\vec{DE}$ et $\vec{DF}$ sont colinéaires.

On a $D(0;0)$, $E\left(\frac{5}{3};0\right)$ et $F\left(1;\frac{2}{5}\right)$. D'où :

$\vec{DE}$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{3};-1\right)$ et $\vec{DF}$ a pour coordonnées $\left(1\,;\frac{2}{5}-1\right)=\left(1\,;-\frac{3}{5}\right)$.

Or $\left(\frac{5}{3};-1\right)=\frac{5}{3}\left(1\,;-\frac{3}{5}\right)$ donc $\vec{DE}$ et $\vec{DF}$ sont colinéaires. Les points D, E et F sont donc alignés.



Exercice 56 page 110

Soient A, B et C trois points non alignés.
Soient a, b et c trois réels tels que $a+b+c\neq 0$ **avec** $b\neq 0$ **et** $c\neq 0$ **.**
Soit M un point tel que $a\,\overrightarrow{AM}+b\,\overrightarrow{BM}+c\,\overrightarrow{CM}=\vec{0}$ **.**
On se place dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ **.**

1. Exprimer les coordonnées de M en fonction de a, b et c.

Exprimons $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Pour cela insérons le point A partout dans l'égalité de vecteurs ci-dessus, à l'aide de la relation de Chasles.

$$a\,\overrightarrow{AM}+b\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)+c\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\right)=\vec{0}$$
$$a\,\overrightarrow{AM}+b\,\overrightarrow{BA}+b\,\overrightarrow{AM}+c\,\overrightarrow{CA}+c\,\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$(a+b+c)\overrightarrow{AM}+b\,\overrightarrow{BA}+c\,\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$
$$(a+b+c)\overrightarrow{AM}=b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

D'où $\overrightarrow{AM}\left(\frac{b}{a+b+c}\,;\frac{c}{a+b+c}\right)$ et $M\left(\frac{b}{a+b+c}\,;\frac{c}{a+b+c}\right)$

2. Montrer que les droites (AM) et (BC) sont parallèles si et seulement si b+c = 0.

Les droites (AM) et (BC) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
Or B a pour coordonnées (1; 0) et C (0; 1), donc le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (-1; 1).
D'après la traduction analytique de colinéarité de deux vecteurs, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{b}{a+b+c}*1=\frac{c}{a+b+c}*(-1)$

c'est-à-dire $\frac{b}{a+b+c}=\frac{-c}{a+b+c}$ soit $b=-c$ ou $b+c=0$.
En conclusion, les droites (AM) et (BC) sont parallèles si et seulement si $b+c=0$.