Corrigé DS I1 du 28 mai 2015

Exercice 1

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 ,\quad z \mathcal{R} z' \iff |z|=|z'|$$

1\. • $\mathcal{R}$ est réflexive :

$\forall z \in \mathbb{C}$, $|z|=|z|$ donc $z \mathcal{R} z$

• $\mathcal{R}$ est symétrique :

$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $z \mathcal{R} z' \Rightarrow |z|=|z'| \Rightarrow |z'|=|z|$

$\Rightarrow z' \mathcal{R} z$

• $\mathcal{R}$ est transitive.

$\forall (z,z',z'') \in \mathbb{C}^3$, $z \mathcal{R} z'$ et $z' \mathcal{R} z''$ impliquent :

$|z|=|z'|$ et $|z'|=|z''|$ d'où $|z|=|z''|$

donc $z \mathcal{R} z''$.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2\. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$cl_{\mathcal{R}}(z) = \{ z' \in \mathbb{C} \,/\, z \mathcal{R} z' \}$$
$$= \{ z' \in \mathbb{C} \,/\, |z|=|z'| \}$$

c'est donc l'ensemble des nombres complexes de même module que z.

Cas particulier : $cl_{\mathcal{R}}(0) = \{0\}$

Remarque : on peut "représenter" graphiquement ces classes d'équivalence par des cercles de centre O et de différents rayons, dans le plan complexe. On retrouve ici que ces classes d'équivalence forment une partition de $\mathbb{C}$.

Exercice 2

1. . $\mathcal{R}$ est réflexive :

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $x = x^1$ et $1 \in \mathbb{Q}^*$ donc $x \mathcal{R} x$

. $\mathcal{R}$ est symétrique :

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Supposons $x \mathcal{R} y$. Alors

$\exists \alpha \in \mathbb{Q}^*$, $x = y^\alpha$. Alors $y = x^{1/\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q}^*$

donc $y \mathcal{R} x$.

. $\mathcal{R}$ est transitive :

Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3$. Supposons $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$.

$x \mathcal{R}$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{Q}^*$, $x = y^\alpha$

$y \mathcal{R} z$ donc $\exists \beta \in \mathbb{Q}^*$, $y = z^\beta$

D'où $x = y^\alpha = (z^\beta)^\alpha = z^{\beta\alpha} = z^{\alpha\beta}$

et $\alpha\beta \in \mathbb{Q}^*$ donc $x \mathcal{R} z$.

$\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.

2.
- $\mathcal{C}l_R(0) = \{ y \in \mathbb{R}^+ \,/\, 0 \mathcal{R} y \}$
$= \{ y \in \mathbb{R}^+ \,/\, \exists \alpha \in \mathbb{Q}^*, \, 0 = y^\alpha \}$

* si $y = 0$, tout $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ convient car $0^\alpha = 0$.

* si $y > 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{Q}^*$, $y^\alpha \neq 0$: aucun α ne convient.

D'où $\mathcal{C}l_R(0) = \{0\}$

- $\mathcal{C}l_R(1) = \{ y \in \mathbb{R}^+ / \, 1 \mathcal{R} y \}$
$= \{ y \in \mathbb{R}^+ \,/\, \exists \alpha \in \mathbb{Q}^*, \, y^\alpha = 1 \}$

* si $y = 1$, tout $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ convient car $1^\alpha = 1$

* si $y \neq 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{Q}^*$, $y^\alpha \neq 1$.

D'où $\mathcal{C}l_R(1) = \{1\}$.

- $\mathcal{C}l_R(2) = \{ y \in \mathbb{R}^+ \,/\, 2 \mathcal{R} y \}$
$= \{ y \in \mathbb{R}^+ \,/\, \exists \alpha \in \mathbb{Q}^*, \, y^\alpha = 2 \}$

* si $y = 2$, $\alpha = 1$ convient car $2^1 = 2$ et $1 \in \mathbb{Q}^*$.

* si $y > 0$, on ne trouvera pas toujours un bon $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

$\mathcal{C}l_R(2) = \{ y \in \mathbb{R}^+ / \exists \alpha \in \mathbb{Q}^*, \, \alpha \ln y = \ln 2 \}$
$= \{ y \in \mathbb{R}^+ / \exists \alpha \in \mathbb{Q}^*, \, y = \exp\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\right) \}$
$= \{ \exp\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\right) / \alpha \in \mathbb{Q}^* \}$

Exercice 3

- R est réflexive :

  $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq f(x)$ donc $x R x$

- R est transitive :

  $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, supposons $x R y$ et $y R z$.

  Alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$, d'où par transitivité de la relation d'ordre $\leq$ dans $\mathbb{R}$, on a $f(x) \leq f(z)$. Donc $x R z$.

- R est antisymétrique :

  Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x R y$ et $y R x$.

  Alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$.

  D'où $f(x) = f(y)$.

  Or f est strictement monotone d'où f est injective. Donc $x = y$

  Donc R est une relation d'ordre.

- L'ordre est total si tous les éléments sont comparables, ie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $x R y$ ou $y R x$.

  Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a bien $x \leq y$ ou $y \leq x$ car l'ordre $\leq$ dans $\mathbb{R}$ est total. Supposons sans perte de généralité que $x \leq y$.

  Or f est strictement monotone.

D'où :

- Si f est strictement croissante, alors $f(x) \leq f(y)$ et $x R y$
- Si f est strictement décroissante, alors $f(y) \leq f(x)$ et $y R x$.

Dans les deux cas, on a $x R y$ ou $y R x$.

Donc x et y sont comparables $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

L'ordre R est donc total.

<u>Exercice 4</u> on note $E = \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$

1) On définit $F = \{ f \in E \,/\, f(0) + f(1) = 0 \}$

- $F \subset E$ et $F \neq \emptyset$ car F contient l'application nulle sur $[0,1]$.
- Soit $(f,g) \in F^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$(\alpha f + \beta g)(0) + (\alpha f + \beta g)(1)$$
$$= \alpha f(0) + \beta g(0) + \alpha f(1) + \beta (1)$$
$$= \alpha (f(0) + f(1)) + \beta (g(0) + g(1))$$
$$= \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$$

donc $\alpha f + \beta g \in F$

F est donc stable par combinaison linéaire.

Donc F est un sev de E.

2) $F = \{ f \in E \ / \ \forall x \in [0, 1] \ , \ f(x) \geqslant 0 \}$

Soit maintenant $f \in E$ telle que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) > 0$.
Ainsi $f \in F$. Mais $\forall x \in [0, 1]$, $(-f)(x) = -f(x) < 0$
d'où $-f \notin F$. F n'est donc pas stable par multiplication externe donc F n'est pas un sev de E.

3) $F = \{ f \in E \ / \ f(1/2) = 1/4 \}$

F ne contient pas la fonction nulle sur $[0, 1]$ donc F n'est pas un sev de E.

4) $F = \{ f \in E \ / \ \forall x \in [0, 1] \ , \ f(x) + f(1-x) = 0 \}$

$F \subset E$ et $F \neq \emptyset$ car F contient la fonction nulle sur $[0, 1]$.

Soient $(f, g) \in F^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$
\begin{aligned}
&(\alpha f + \beta g)(x) + (\alpha f + \beta g)(1-x) \\
&= \alpha f(x) + \beta g(x) + \alpha f(1-x) + \beta g(1-x) \\
&= \alpha \big(f(x) + f(1-x) \big) + \beta \big(g(x) + g(1-x) \big) \\
&= \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0
\end{aligned}
$$

donc $\alpha f + \beta g \in F$

F est stable par combinaison linéaire.

Donc F est un sev de E.

Exercice 5

Soient E_1 et E_2 deux sev d'un espace vectoriel E.

- $E_1 \subset E$ et $E_2 \subset E$ donc $E_1 \cap E_2 \subset E$.
- $0_E \in E_1$ car E_1 est un sev de E
  $0_E \in E_2$ car E_2 est un sev de E
  donc $0_E \in E_1 \cap E_2$ d'où $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$.
- Montrons maintenant que $E_1 \cap E_2$ est stable par combinaison linéaire.
  Soient $(x, y) \in (E_1 \cap E_2)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
  - $E_1 \cap E_2 \subset E_1$ donc $(x, y) \in E_1^2$
    or E_1 un sev de E (donc stable par comb. lin.)
    donc $\alpha x + \beta y \in E_1$.
  - De même $E_1 \cap E_2 \subset E_2$ donc $\alpha x + \beta y \in E_2$
  - Ainsi $\alpha x + \beta y \in E_1 \cap E_2$:
    $E_1 \cap E_2$ est stable par combinaison linéaire.

Finalement $E_1 \cap E_2$ est un sev de E.