CHAPITRE 4 : FONCTIONS

I - Généralités sur la notion de fonction

Définition, vocabulaire et notation

Soit D un ensemble de nombres réels.
Définir une **fonction f** sur D, c'est associer à tout nombre x de D un unique nombre réel noté $f(x)$ (lu « f de x »).
On note alors : $f: \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ ou $f: x \longmapsto f(x)$, $x \in D$
L'ensemble D est appelé **ensemble de définition** de f.
Lorsque x varie dans D, $f(x)$ varie dans $\mathbb{R}$. On dit que x est la **variable** de la fonction f et que $f(x)$ est **<u>l'</u>image** de x par f. Si y est l'image de x par f, alors on écrit $y = f(x)$ et on dit que x est **<u>un</u> antécédent** de y par f.

Exemples

Une fonction peut être définie par :

1) Un **tableau de valeurs**

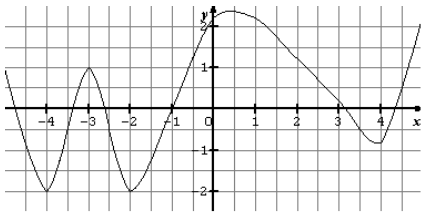
N° du jour de la semaine	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de SMS reçu	4	0	7	2	9	16	11

$D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

2) Une **formule explicite**

$f: \begin{array}{l} [5; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x^2 + \sqrt{x} + 1{,}5 \end{array}$ $D = [5; +\infty[$

3) Une **courbe**



$D = [-5; 5]$

4) Un **énoncé en français**

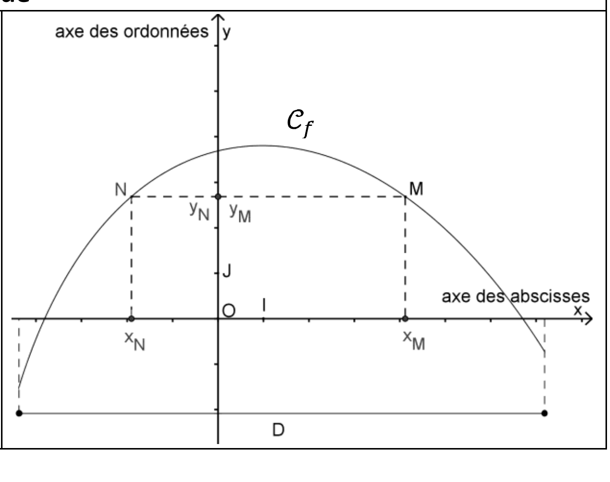
On note h la hauteur (en mètres) d'un pommier en fonction de t, temps écoulé depuis l'apparition de la première feuille (en années). $D = [0; 50]$

À chaque problème une solution

- **Déterminer le domaine de définition D d'une fonction f.**
  Le domaine de définition est souvent donné. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut le déterminer, c'est-à-dire trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.
  a) Si la fonction est définie par une formule explicite, on s'assure que
     - tout dénominateur comportant la variable x n'est pas **égal à 0** ;
     - toute expression comportant la variable x dans une racine carrée est **positive**.
  b) Si la fonction est définie autrement (tableau, courbe, énoncé), on s'inspire des informations disponibles.
- **Déterminer l'image d'un nombre.**
  Pour déterminer l'image d'un nombre a par une fonction f, on calcule $f(a)$. Si on a une formule explicite, on remplace tous les x de l'expression de f par a. Sinon, on s'inspire des informations disponibles (lecture de tableau, de graphique, analyse de l'énoncé).
- **Déterminer les antécédents d'un nombre.**
  Pour déterminer les antécédents d'un nombre b par une fonction f, on résout l'équation $f(x) = b$.

Représentation graphique

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal du plan (les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires).
La **courbe représentative** ou **représentation graphique $\mathcal{C}_f$** d'une fonction f définie sur un ensemble D est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où $x \in D$.
On dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour **équation** $y = f(x)$.
Un point $A(a; b)$ du plan appartient à la courbe $\mathcal{C}$ si et seulement si $\boldsymbol{a \in D}$ et $\boldsymbol{b = f(a)}$.
Sur la figure ci-contre, $x_M \in D$; le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'**abscisse** x_M est le point M de coordonnées $(x_M; y_M)$; l'image de x_M par f est l'**ordonnée** y_M ; les antécédents de y_M par f sont x_M et x_N.



À chaque problème une solution graphique

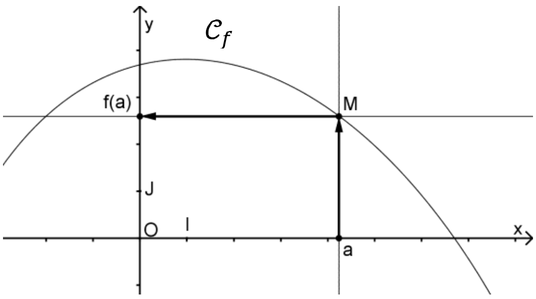
- **Déterminer graphiquement l'image d'un nombre.**

Pour déterminer graphiquement l'image $f(a)$ d'un nombre a par une fonction f :

a) On place le point d'abscisse a sur l'axe (Ox) des abscisses.

b) On trace la droite parallèle à l'axe (Oy) des ordonnées passant par ce point, elle coupe la courbe représentative de f en un unique point M.

c) On trace la droite parallèle à l'axe (Ox) passant par M, elle coupe l'axe (Oy) en un unique point dont l'ordonnée est $f(a)$.



- **Déterminer graphiquement les éventuels antécédents d'un nombre.**

Pour déterminer graphiquement les éventuels antécédents d'un nombre b par une fonction f :

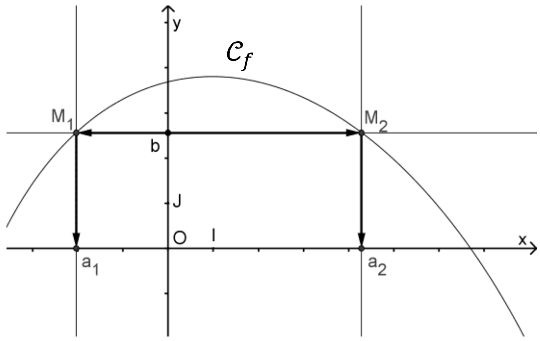
a) On place le point d'ordonnée b sur l'axe (Oy).

b) On trace la droite parallèle à l'axe (Ox) passant par ce point. Plusieurs cas de figure se présentent :

c1) Si cette droite ne coupe pas la courbe représentative de f, alors b **n'a pas d'antécédents** par la fonction f ;

c2) Si elle coupe la courbe représentative de f en un ou plusieurs points M_1 , M_2 , M_3 … alors on trace en chacun de ces point une droite parallèle à l'axe (Oy), elles coupent chacune l'axe (Ox) en des points d'abscisses respectives a_1 , a_2 , a_3 … qui sont les antécédents de b par f.

c3) Si la droite coïncide avec la courbe représentative de f sur un intervalle, alors b admet une **infinité d'antécédents** : tous les nombres de l'intervalle.



➤ **Résoudre graphiquement une équation**	➤ **Résoudre graphiquement une inéquation**
C'est le même travail	

II - Fonctions affines

Définitions et vocabulaire

Soient a et b deux nombres réels et f la fonction définie par $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax+b \end{array}$.

La fonction f est appelée **fonction affine**.
Le nombre a est appelé **coefficient directeur** de la fonction f.
Le nombre b est appelé **ordonnée à l'origine** de la fonction f.
Cas particulier :
Si $\boldsymbol{b=0}$, alors $f(x)=ax$ et on dit que la fonction f est **linéaire**.
Si $\boldsymbol{a=0}$, alors $f(x)=b$ et on dit que la fonction f est **constante**.

Exercice 1

1) Quel est le domaine de définition d'une fonction affine ?
2) Donner un exemple :
   a) d'une fonction affine ni linéaire ni constante ;
   b) d'une fonction linéaire mais pas constante ;
   c) d'une fonction constante mais pas linéaire ;
   d) d'une fonction linéaire et constante ;
   e) d'une fonction non affine.
3) Trouver des exemples de phénomènes réels pouvant se modéliser par des fonctions affines, linéaires ou constantes.
4) Pour chacune des fonctions ci-dessous, vérifier s'il s'agit bien d'une fonction affine, et, si c'est le cas, calculer son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.
   $f_1(x)=-0{,}5^2x+\sqrt{7}-2$; $f_2(x)=\left(x+\sqrt{3}\right)^2-(x+3)^2$; $f_3(x)=\frac{7x}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3x}{7}-\frac{1}{5}$; $f_4(x)=\frac{7x+5}{3}+\frac{7}{3}(-5-x)$.

Propriété caractéristique

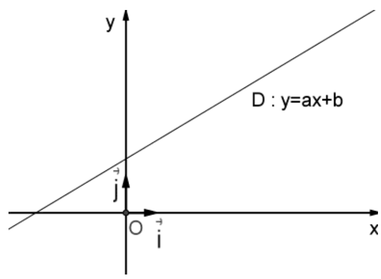
Théorème : L'accroissement d'une fonction affine $\boldsymbol{f}$ est proportionnel à l'accroissement de sa variable : pour tous réels distincts $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$ on a $\boldsymbol{\frac{f(m)-f(n)}{m-n}=a}$.

Remarques :
- Le nombre a est également appelé **taux d'accroissement** de la fonction f.
- Une fonction linéaire est elle-même proportionnelle à sa variable.

Représentation graphique

On muni le plan d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Théorème :
i) La représentation graphique de la fonction affine $\boldsymbol{f : x \longmapsto ax+b}$ est une droite $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ d'équation $\boldsymbol{y=ax+b}$.
ii) Réciproquement, toute droite <u>non parallèle à l'axe (Oy)</u> des ordonnées est la courbe représentative d'une fonction affine.



Remarques :
- Le nombre a est aussi appelé coefficient directeur ou **pente** de la droite $\mathcal{D}$.
- Les fonctions linéaires sont représentées par des droites passant par l'origine.
- Les fonctions constantes sont représentées par des droites parallèles à l'axe (Ox) des abscisses.
- Deux fonctions affines ayant le même coefficient directeur sont représentées par deux droites parallèles.

Exercice 2

1) Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ et $\mathcal{D}$ sa représentation graphique.
   a) Quelle sont les images respectives de 0 et 1 par f ? En déduire les coordonnées des points A et B de $\mathcal{D}$ telles que $x_A=0$ et $x_B=1$.
   b) Supposons que f ne soit pas constante. Justifier que 0 admet un unique antécédent par f et donner sa valeur. Traduire graphiquement cette propriété et en déduire les coordonnées du point C de $\mathcal{D}$ telles que $y_C=0$.
   c) Faire une figure similaire à celle ci-dessus et placer les points A, B et C avec leurs coordonnées.
   d) Pourquoi les nombres a et b s'appellent respectivement coefficient directeur et ordonnée à l'origine de la fonction f ?
2) Dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, représenter graphiquement les fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par :
   $f_1(x)=-x-2$; $f_2(x)=\frac{2x}{5}+1$; $f_3(x)=-\frac{3x+2}{7}$; $f_4(x)=5x$; $f_5(x)=\frac{\sqrt{50}}{2}$.
   On choisira judicieusement deux points du plan pour tracer les courbes.
3) Exercice n°38 p. 86.

Méthodes : i) **Comment représenter graphiquement une fonction affine à partir de son expression ?**

- On détermine deux points de la droite représentant la fonction (On essaie de trouver des points correspondant aux nœuds du quadrillage et pour la précision on ne choisit pas deux points trop proches).
- On détermine un point de la droite représentant la fonction et on considère le coefficient directeur a qui est aussi la « pente algébrique » de cette droite.

ii) **Comment trouver l'expression d'une fonction affine à partir de sa représentation graphique ?**

- Voir méthode du livre p. 75 et méthode vue en module.

Exercice 3

Exercices n°25 à 31 p. 86.

Signe du coefficient directeur et variations des fonctions affines

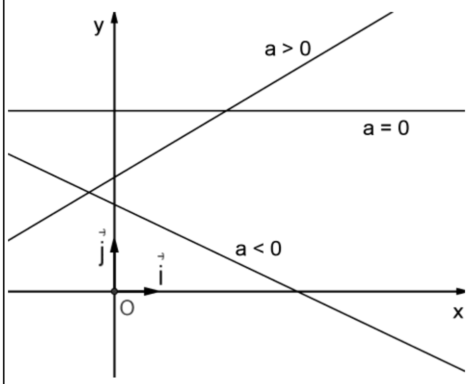
- Si $\boldsymbol{a} > 0$, alors la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. (quand x « augmente », f augmente également)
- Si $\boldsymbol{a = 0}$, alors la fonction f est **constante** sur $\mathbb{R}$. La droite $\mathcal{D}$ représentant f est parallèle à l'axe (Ox) des abscisses.
- Si $\boldsymbol{a} < 0$, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.

On peut présenter les variations d'une fonction à l'aide de tableaux appelés **tableaux de variation :**

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\rightarrow$	

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\searrow$	



Exercice 4

Exercices n°49 à 51 p. 87 (Étudier le sens de variation d'une fonction, c'est préciser sur quels intervalles elle est strictement décroissante, strictement croissante ou constante).

Signe des fonctions affines

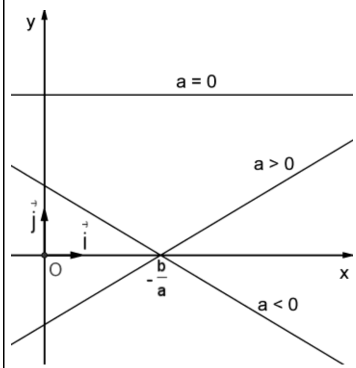
- Si $\boldsymbol{a \neq 0}$, alors :
  - la fonction f s'annule en une seule valeur : $-\frac{b}{a}$,
  - la droite $\mathcal{D}$ représentant f coupe l'axe (Ox) des abscisses en un unique point d'abscisse $-\frac{b}{a}$.
  - Si $\boldsymbol{a} > 0$, alors f est : **strictement négative sur** $\left]-\infty ; -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right[$ et **strictement positive sur** $\left]-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} ; +\infty\right[$**.**
  - Si $\boldsymbol{a} < 0$, alors f est : **strictement positive sur** $\left]-\infty ; -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right[$ et **strictement négative sur** $\left]-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} ; +\infty\right[$.
- Si $\boldsymbol{a = 0}$, alors :
  - pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = b$
  - la fonction f est **de signe de constant sur** $\mathbb{R}$, c'est-à-dire **du signe de $\boldsymbol{b}$ sur** $\mathbb{R}$.

On peut donner le signe d'une fonction à l'aide de tableaux appelés **tableaux de signe**.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$-$	|	$+$	

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$+$	|	$-$	

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$+$ ou $-$ (selon le signe de b)	



Exercice 5

Étudier le signe des fonctions des exercices n°49 à 51 p. 87 et présenter les résultats dans des tableaux de signe. (Étudier le signe d'une fonction, c'est préciser sur quels intervalles elle est strictement négative, strictement positive ou nulle).