Chapitre : Probabilités

Introduction : La **probabilité** (du latin *probabilitas*) est une évaluation du caractère probable d'un événement. Le véritable début de la théorie des probabilités date du 17ème siècle avec la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal. autour de l'étude de **jeux de hasard** proposés, entre autres, par le chevalier de Méré. C'est ainsi à partir de la fin du 17ème siècle que la notion de probabilité ne concernera plus seulement les opinions et les idées mais aussi les faits et se rapprochera de la notion de **hasard** (de l'arabe *al zhar* qui désigne un dé à jouer) ou d'**aléatoire** (du latin *alea* qui signifie jeu de dés). Outre les jeux de hasard, de nombreux domaines d'applications des probabilités existent aujourd'hui. En voici une liste non exhaustive :

- Les **statistiques**.
- La **théorie des jeux**.
- La **prise de décision** en économie, en imagerie médicale, en astronomie, en cryptographie...
- La **physique** et la **biologie moléculaire** où l'étude du mouvement brownien pour de petites particules font intervenir des concepts probabilistes comme la marche aléatoire .
- Les **mathématiques financières** faisant grand usage de la théorie des probabilités pour l'étude des cours de la bourse et des produits dérivés.


Compétences attendues en fin de chapitre :

1. Connaître les notions d'expérience aléatoire, d'univers, d'issues et d'événements.
2. Savoir décrire l'univers d'une expérience aléatoire.
3. Connaître les notions d'union et d'intersection d'événements, d'événement certain, d'événement impossible, d'événement contraire, de deux événements incompatibles.
4. Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité.
5. Calculer la probabilité d'un événement par addition des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Faire le lien avec les fréquences (loi faible des grands nombres).
6. Connaître et exploiter la formule $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.
7. Savoir utiliser des arbres, diagrammes de Venn ou tableaux à double entrée dans le calcul de probabilités.

Ressources :

✔ Programme de mathématiques pour la classe de seconde (paru en juin 2009).
✔ Document d'accompagnement en probabilités et statistiques pour la seconde (juin 2009).
✔ Manuel de seconde Indice de Bordas (édition août 2009).
✔ Manuel de seconde Hyperbole de Nathan (édition septembre 2009).
✔ http://fr.wikipedia.org/

Note : Ce document a été réalisé à l'aide du logiciel libre Open Office Writer.

I – Expérience aléatoire, univers, événements

Définition : Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le **résultat** n'est pas connu d'avance et peut varier si on répète l'expérience.

Exemples : jeter une pièce de monnaie, lancer des dés, prélever des boules dans une urne, tirer des cartes...

Vocabulaire : le **résultat** d'une expérience aléatoire peut aussi être appelé **issue** ou **éventualité**.

Définition : On appelle univers l'ensemble des résultats (ou issue, éventualité) possibles d'une expérience aléatoire. On note $\Omega=\{e_1\,;e_2\,;...\,;e_n\}$ où les e_i sont des issues.

Exemple : On lance un dé et on s'intéresse au résultat obtenu. L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Attention : on peut définir plusieurs univers pour une même expérience aléatoire, suivant ce que l'on entend par « résultat possible ».
Par exemple, on prélève une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires numérotées :
Cas 1 : le résultat observé est la boule obtenue : $\Omega = \{R_1; R_2; N_1; N_2; N_3\}$.
Cas 2 : le résultat observé est la couleur de la boule obtenue : $\Omega = \{\text{noir}; \text{rouge}\}$.

Définitions :

- Un **événement**, noté A, est une partie (ou sous-ensemble) de l'univers Ω. On note $A\subset\Omega$. C'est donc un ensemble d'issues de l'expérience aléatoire. on dit de ces issues qu'elles réalisent A ou sont favorables à A.
- l'ensemble vide, $\emptyset$, est l'événement **impossible** (ne se réalise jamais),
- l'univers, Ω, est l'événement **certain** (se réalise à chaque expérience).
- L'**événement contraire** de A est noté $\bar{A}$, il est réalisé lorsque A n'est pas réalisé.
- Un **événement élémentaire** ne comporte qu'une seule issue, par exemple $\{e_1\}$ ou $\{e_2\}$.
- L'événement « **A ou B** », noté $A\cup B$, est réalisé lorsque l'un au moins des deux événements est réalisé.
- L'événement « **A et B** », noté $A\cap B$, est réalisé lorsque les deux événements sont réalisés.
- Si $A\cap B=\emptyset$, A et B sont dits **événements incompatibles**.

Exemple : On lance deux fois un dé numéroté de 1 à 6. On pose $\Omega = \{1,2,...,6\}^2$. On considère l'événement A «obtenir une somme supérieure ou égale à 11 ». On a A = {(5,6), (6,5), (6,6)}.
A est l'ensemble des issues (5,6), (6,5) et (6,6).
{(5,6)}, {(6,5)} et {(6,6)} sont des événements élémentaires.
L'événement contraire de A est « obtenir une somme strictement inférieure à 11 ».
L'événement « obtenir une somme inférieure à 4 et supérieure à 8 » est un événement impossible.
Les événements « obtenir une somme inférieure à 4 » et « obtenir une somme supérieure à 8 » sont deux événements incompatibles.
L'événement « obtenir une somme inférieure ou égal à 12 » est l'événement certain.

II – Fréquences d'apparition d'une issue ou d'un événement

II.1 Définition d'une fréquence

Définition : On considère une expérience aléatoire contenant ***n*** issues $e_{1,}e_{2,}\dots,e_n$ et on s'intéresse à l'une des ***issues*** e_i (par exemple e_1) . Si cette issue se réalise ***K*** fois lorsque l'expérience aléatoire est répétée ***N*** fois, sa ***fréquence*** ou ***fréquence d'apparition*** est égale à $\frac{K}{N}$. On note $f_i=\frac{K}{N}$.

Exemple : On lance un dé 50 fois. Au cours de ces 50 lancés, la face marquée 6 apparaît 13 fois. La fréquence d'apparition du 6 est donc $\frac{13}{50}$ soit 0,26.

Remarque : on définit de la même manière la fréquence d'apparition d'un événement.

Propriété : Une fréquence est comprise entre 0 et 1 et la somme des fréquences de toutes les ***issues*** $e_{1,}e_{2,}\dots,e_n$ d'une expérience aléatoire vaut 1 :

- $0\leq f_i\leq 1$ pour tout $i\in\{1,2,\dots,n\}$
- $f_1+f_2+\dots+f_n=1$

Exercice : prenez un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 et lancez le 10 fois en notant les numéros de faces obtenus. Donnez les fréquences d'apparition de chaque numéro et vérifiez que leur somme vaut 1.

Remarque importante : si vous considérez non pas toutes les issues mais tous les événements possibles d'une expérience aléatoire, la somme de leur fréquence d'apparition n'est pas égale à 1.

Exercice : lancer un dé 10 fois, calculer les fréquences des événements A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 4 », B : « obtenir un numéro pair » et C : « obtenir un numéro impair ».

Additionner ces fréquences et vérifier que la somme est supérieure à 1.

II.1 Stabilisation des fréquences

Propriété [loi faible des grands nombres] : Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, alors la fréquence de n'importe quel événement lié à cette expérience a de fortes chances de se stabiliser autour d'un nombre que l'on appelle la probabilité de cet événement.

Remarque : cette propriété est bien sûr valable pour les événements élémentaires, c'est à dire ne comportant qu'une seule issue.

Exemples :

- Si l'on effectue le lancer d'une pièce de monnaie bien équilibrée un très grand nombre de fois, la fréquence d'apparition du FACE est de plus en plus proche de ½.
- voir TP d'introduction à Scilab et simulation de lancés de 1 puis 2 dés.

III – Probabilité d'un événement

Dans tout ce paragraphe, on considère à nouveau une expérience aléatoire comportant nombre fini n d'issues possibles $e_1, e_2, \dots, e_n$. L'univers est alors $\Omega=\{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$.

III.1 Définitions et propriétés

Définitions : 1. Définir une ***loi de probabilité*** sur Ω , c'est associer à chaque ***issue*** e_i , ou à chaque ***événement élémentaire*** $\{e_i\}$, un nombre p_i de telle façon que :

- $0 \le p_i \le 1$ pour tout $i \in \{1,2, \dots, n\}$
- $p_1+p_2+\dots+p_n=1$

Ce nombre p_i est appelé probabilité de l'issue e_i ou de l'événement élémentaire $\{e_i\}$.

2. A chaque événement ***A*** est associée sa probabilité p(A) : c'est la somme des probabilités p_i des issues e_i qui le réalisent.

Exemple : Si $A=\{e_1 ; e_3 ; e_5\}$, alors $p(A)=p_1+p_3+p_5$

Cas particulier : $p(\Omega)=p_1+p_2+\dots+p_n=1$ et $p(\emptyset)=0$

En effet il est certain qu'une des issues possibles soit réalisée au cours d'une expérience; et l'événement impossible ne se produit jamais, sa probabilité est donc nulle.

Remarque : D'après la loi faible des grands nombres, ce nombre p_i est aussi la valeur autour de laquelle f_i se stabilise lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois. On dit alors que la distribution des fréquences se rapproche de la loi de probabilité.

Propriété : Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire. Alors :

1. $0 \le p(A) \le 1$
2. $p(A)+p(\bar{A})=1$, c'est-à-dire $p(\bar{A})=1-p(A)$
3. $p(A \cup B)+p(A \cap B)=p(A)+p(B)$

Démonstration : 1. $A \subset \Omega$ donc $p(A) \le 1$. De plus les p_i sont positifs donc $p(A) \ge 0$.

2. $A \cup \bar{A}=\Omega$ et $A \cap \bar{A}=\emptyset$ donc $p(A)+p(\bar{A})=p(\Omega)=1$

3. Illustrer la propriété à l'aide d'un diagramme de Venn.

III.2 Cas d'équiprobabilité

Définition : On dit qu'on est en situation d'***équiprobabilité*** lorsque toutes les issues ou tous les événements élémentaires ont la même probabilité. La loi de probabilité est alors dite ***uniforme***.

Exemple : si on lance d'un dé bien équilibré, chaque face a la même probabilité 1/6 de tomber.

Propriété : Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement ***A***, comportant ***k*** issues, est donnée par :

$$p(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{nombre d'issues dans } A}{\text{nombre d'issues dans } \Omega}=\frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$