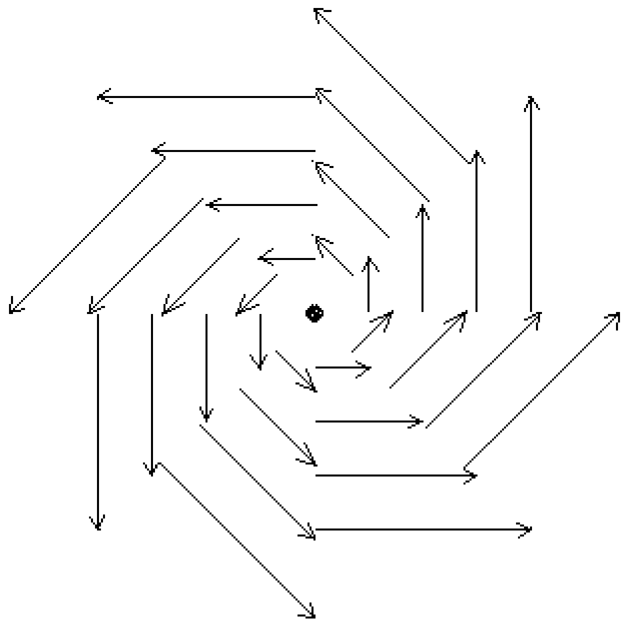
Chapitre : Repérage et vecteurs dans le plan

Introduction :

Dès l'Antiquité les problèmes de repérage se sont posés dans les domaines de l'astronomie et de la navigation. La notion de coordonnées dans un repère est généralement attribuée à René Descartes et Pierre de Fermat au $17^{\text{ème}}$ siècle. Hermann Grassmann, mathématicien allemand du $19^{\text{ème}}$ siècle est l'un des premiers à aborder la notion de *segments orientés* et William Rowan Hamilton, mathématicien irlandais du même siècle, est le premier à employer le terme de vecteur. Aujourd'hui, les applications des vecteurs se retrouvent dans de nombreux domaines tels que la physique (forces, vitesses, accélérations, déplacements), l'électricité (vecteur de courant) ou encore l'économie et les calculs financiers.
Dans l'enseignement supérieur, les vecteurs sont étudiés de manière plus approfondie dans le cadre de ce que l'on appelle l'algèbre linéaire, où l'on découvre que des objets comme une fonction, une application linéaire ou encore une variable aléatoire, peuvent être considérés comme des vecteurs. En lycée, nous nous contentons d'envisager un vecteur comme un « segment orienté » entre deux points du plan ou comme représentant d'une force ou d'une vitesse en physique.



Ressources :
- ✔ Programme de mathématiques pour la seconde générale et technologique, paru en juin 2009.
- ✔ Manuel de seconde Indice de Bordas (édition août 2009).
- ✔ Manuel de seconde Hyperbole de Nathan (édition septembre 2009).
- ✔ Manuel de seconde Abscisse de Magnard (édition avril 2004).

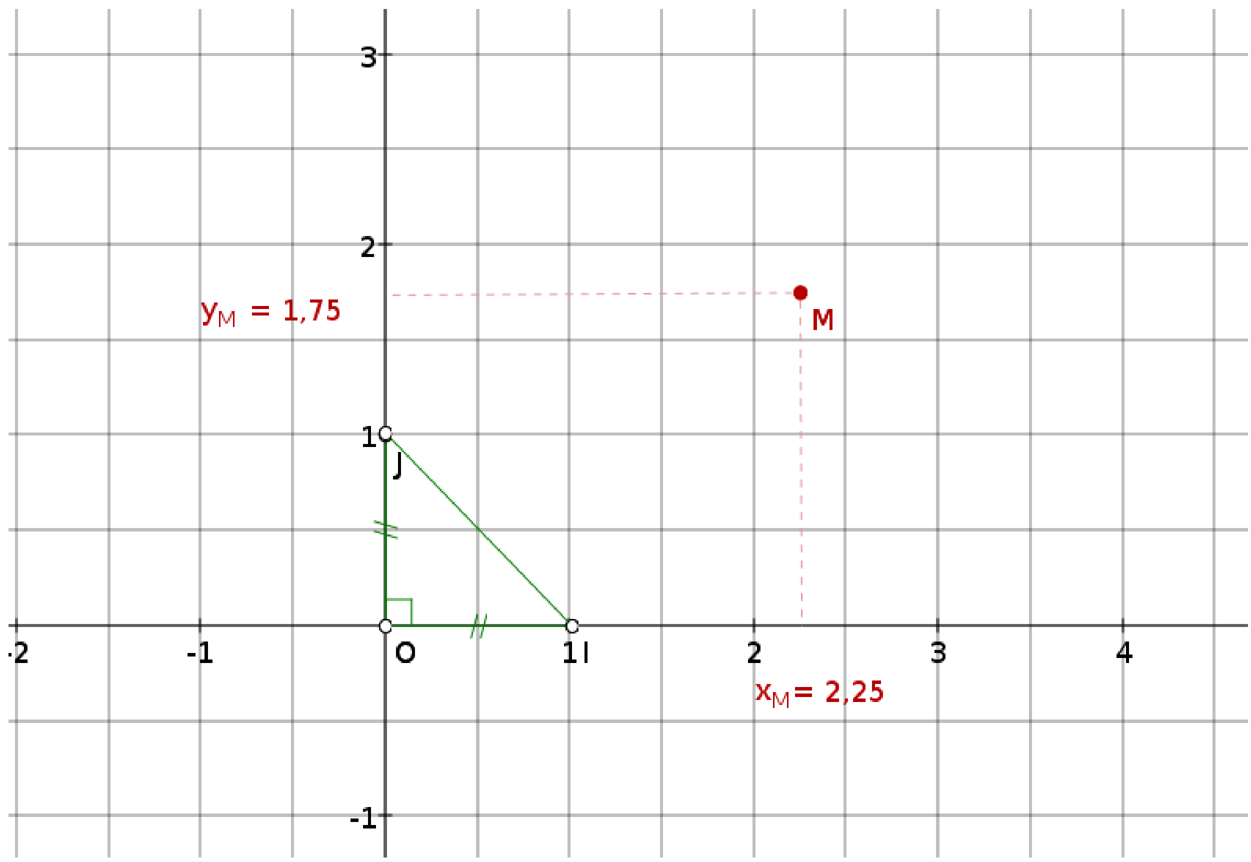
Note : Ce document a été réalisé à l'aide des logiciels libres et multi-plateformes Open Office et CaRMetal (logiciel de géométrie dynamique).

I – Repère orthonormé du plan et coordonnées d'un point

Définition : Un repère **orthonormé** (ou **orthonormal**) du plan est défini par trois points (O, I, J) formant un triangle rectangle isocèle en O.

NB : dans le repère orthonormé (O, I, J), on a $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$.

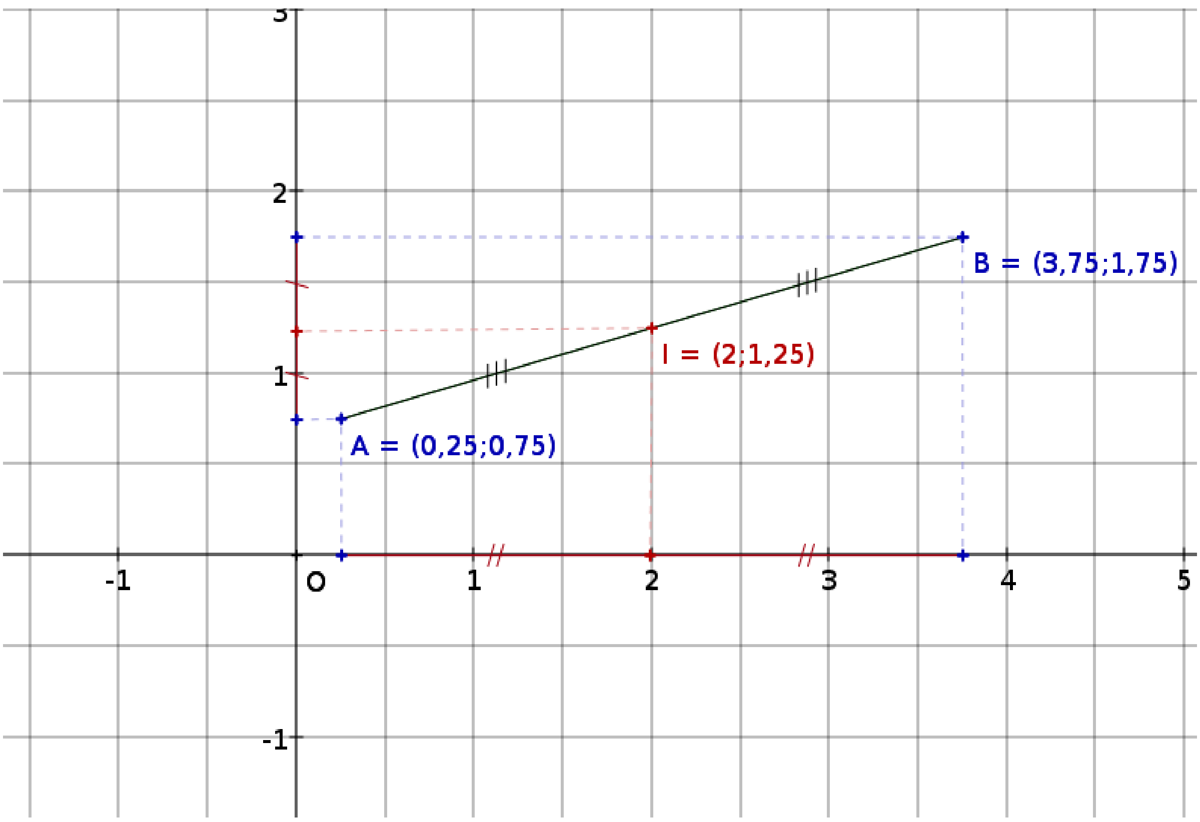
Propriété – définition : Dans un repère orthonormé du plan, tout point M est repéré par un unique couple $(x_M\,;y_M)$ de réels, appelés couple des **coordonnées** de M.
x_M est appelé l'**abscisse** de M et y_M est appelé l'**ordonnée** de M.
Réciproquement, à tout couple $(a\,;b)$ de réels, on associe un unique point M de coordonnées a et b.



Notation : pour désigner le point M de coordonnées $(x_M\,;y_M)$, on écrit $M(x_M\,;y_M)$.

Propriété : Soient deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ du plan.

Alors le **milieu** I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.



Remarque : cette propriété reste vraie dans un repère quelconque (non nécessairement orthonormé).

Démonstration : projection des points A, B et I sur les axes de coordonnées et utilisation du théorème de Thalès. On peut également utiliser la propriété de la droite des milieux dans un triangle.

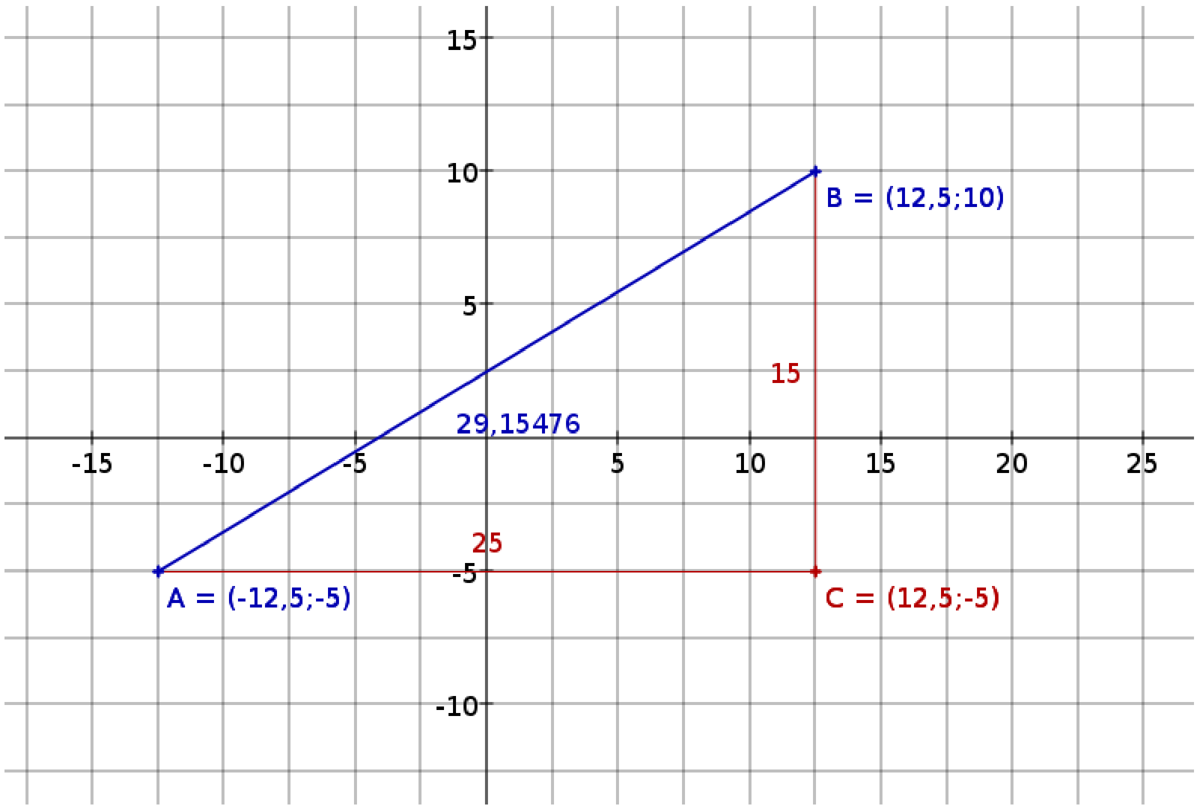
Attention à ne pas se méprendre : un point n'est pas égal à ses coordonnées mais est repéré par des coordonnées dans un repère. Les symboles = sur le schéma ci-dessus n'ont pas lieu d'être. Je n'ai simplement pas trouvé la façon de ne pas les afficher sur CaRMetal.

II – Distance entre deux points du plan

Propriété : Dans un repère **orthonormé** du plan, soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Alors la distance entre les points A et B est : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Attention : **cette propriété n'est plus valable dans un repère quelconque non orthonormé** !

Démonstration : à l'aide du théorème de Pythagore.



Exercice : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère deux points A et B de coordonnées respectives (2; -6) et (-4; 8).

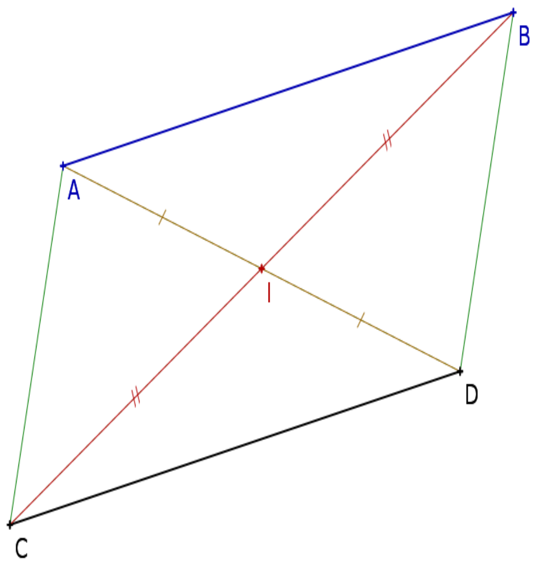
1. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
2. Calculer la distance AB .

III . Translation et notion de vecteur

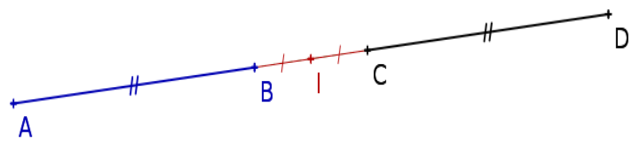
III.1 - Translation

Définition : Soient A et B deux points du plan.
A tout point C du plan, on associe, par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

1er cas : $C \notin (AB)$
ABDC est un parallélogramme non aplati.



2ème cas : $C \in (AB)$
ABDC est un parallélogramme aplati.



Technique : pour placer le point D, on peut placer le milieu I de [BC], puis le symétrique de A par la symétrie centrale de centre I.

Vocabulaire : on dit au choix que :

- D est l'image de C par la translation,
- la translation transforme C en D,
- la translation envoie C sur D.

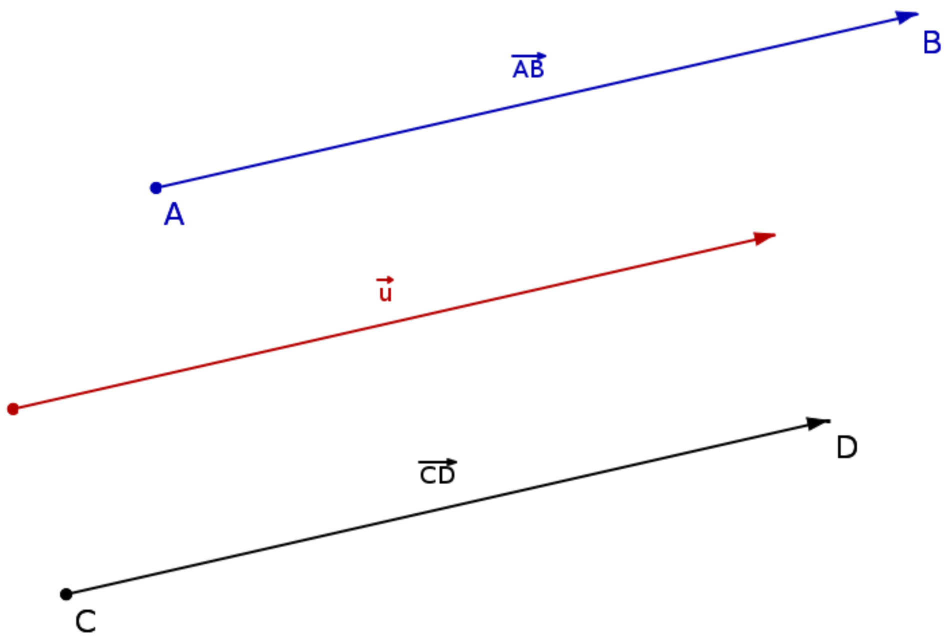
III.2 - Vecteurs

➢ Notion de vecteur associé à une translation

Définition : Soient trois points A, B, C du plan et D l'image de C par la translation qui transforme A en B. Alors les points A et B pris dans cet ordre, et les points C et D pris dans cet ordre, représentent le même vecteur $\vec{u}$: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Vocabulaire :

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des **représentants** d'un même vecteur que l'on a noté $\vec{u}$.
- A est **l'origine** et B est **l'extrémité** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Technique : pour dessiner un vecteur $\overrightarrow{AB}$, on trace le segment $[AB]$ puis on dessine une flèche en B.
Remarque : il existe une infinité de façon de tracer le vecteur $\vec{u}$ car on peut le tracer en chaque point du plan.
Cas particulier : Pour tout point A, $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, on écrit : $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

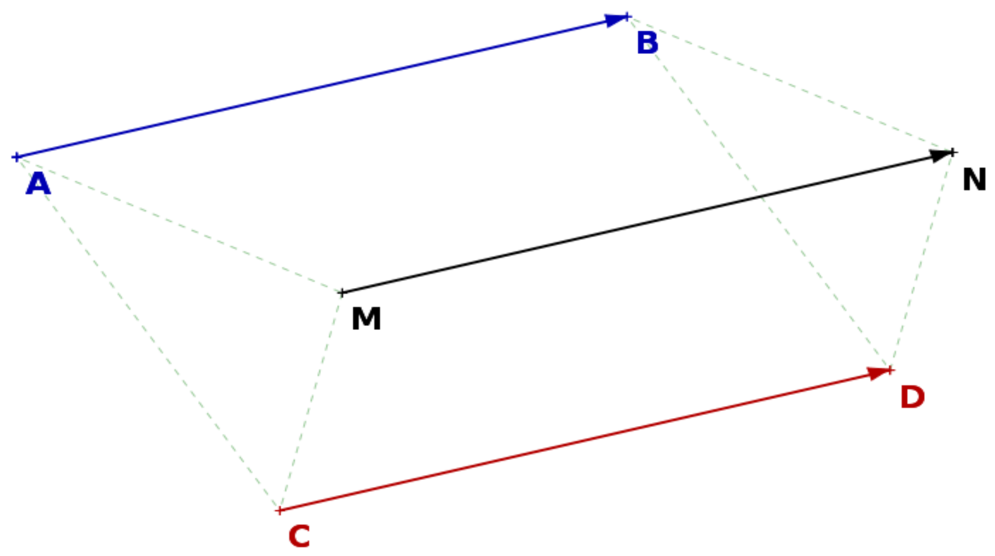
On a alors le vocabulaire suivant :

Définition : Soient A et B deux points du plan. Alors :

- La translation qui transforme A en B est appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **.**
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le **vecteur associé** à cette translation.

➢ Cas d'égalité de deux vecteurs

Soient A, B, C trois points du plan et D l'image de C par la translation de vecteur $\vec{AB}$. Alors à tout point M, la translation de vecteur $\vec{AB}$ et la translation de vecteur $\vec{CD}$ associent le même point N. En effet si ABDC et ABNM sont des parallélogrammes, alors on montre que CDNM est aussi un parallélogramme.



D'où la définition et la propriété suivantes :

<u>Définition</u> : Soient A , B , C et D quatre points du plan.
Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont dits égaux si la translation qui transforme A en B , transforme également C en D . On note alors $\vec{AB}=\vec{CD}$.

<u>Propriété</u> : Soient A,B,D et D quatre points du plan. Alors :
- ➢ $\vec{AB}=\vec{CD}$ équivaut à « $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu ».
- ➢ $\vec{AB}=\vec{CD}$ équivaut à « ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati ».

<u>Démonstration</u> : Le premier point résulte de la définition d'une translation. Le deuxième point résulte du fait qu'un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales ont même milieu.

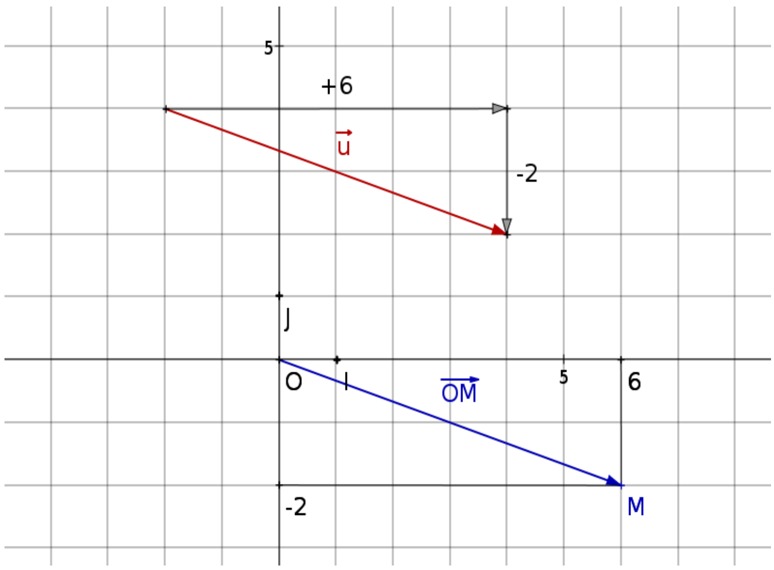
IV – Coordonnées d'un vecteur dans un repère (0, I, J)

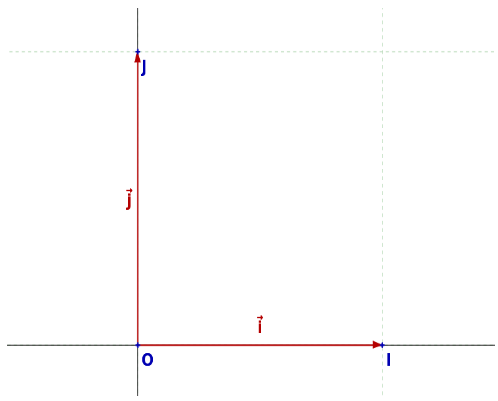
IV.1 - Coordonnées d'un vecteur

Soient (O, I, J) un repère du plan et $\vec{u}$ un vecteur. La translation de vecteur $\vec{u}$ associe au point O un unique point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$. On a alors naturellement la définition suivante :

Définition : Dans un repère (O, I, J), les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.
Soit (x;y) les coordonnées de M, ce sont aussi les coordonnées de $\vec{u}$. On note $\vec{u}(x;y)$.

Exemple : on a $\overrightarrow{OI}(1;0)$, $\overrightarrow{OJ}(0;1)$ et $\vec{u}(6;-2)$



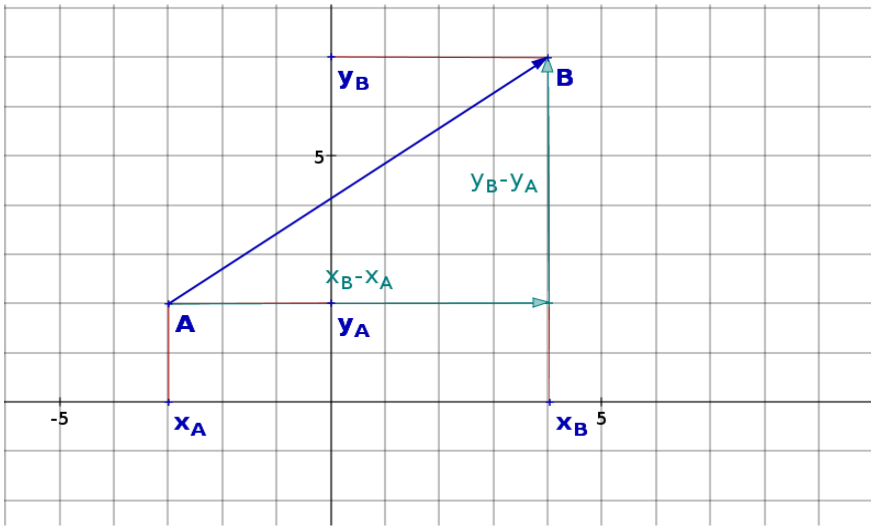


Remarque : au lieu de noter (O, I, J) un repère, on peut le noter à l'aide de vecteurs, on le note souvent $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

Propriété : Dans un repère, soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs.
$\vec{u}=\vec{v}$ équivaut à $x=x'$ et $y=y'$.
Autrement dit, deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

IV.1 - Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

Propriété : Dans un repère, soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points.
Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
On peut noter $x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A$ et $y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A$.

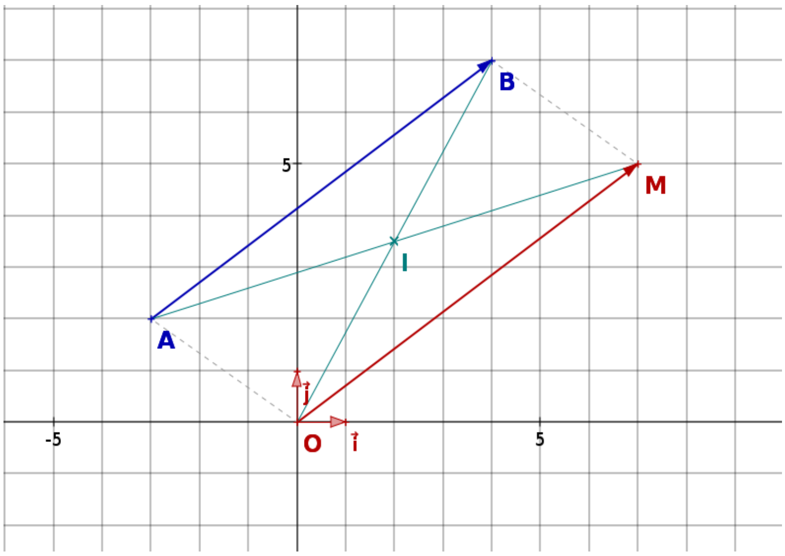


Démonstration :
Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note M le point tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire tel que ABMO est un parallélogramme. Les segments $[OB]$ et $[AM]$ ont donc le même milieu I. Les coordonnées de I s'écrivent alors de deux façons différentes : $x_I = \frac{x_B}{2} = \frac{x_A + x_M}{2}$ et $y_I = \frac{y_B}{2} = \frac{y_A + y_M}{2}$.

On en déduit que $x_M = 2x_I - x_A = 2\frac{x_B}{2} - x_A = x_B - x_A$ et de même que $y_M = y_B - y_A$.

Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ donc dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont celles du point M, c'est-à-dire $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

Schéma associé à la démonstration



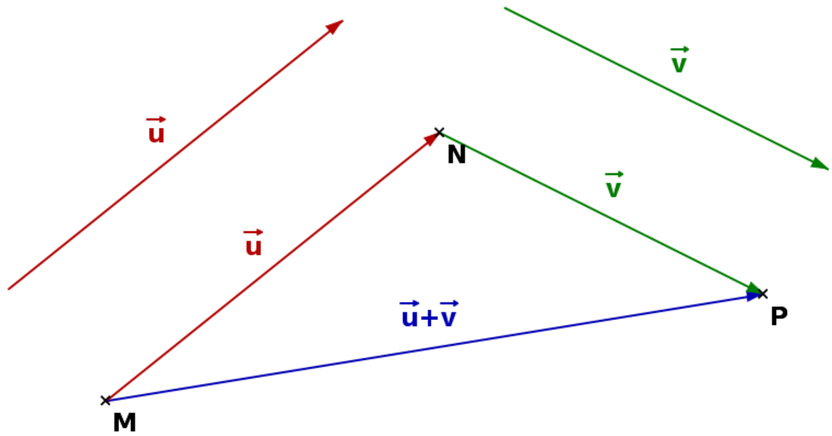
Exemple : les points A et B de la figure ci-dessus ont pour coordonnées respectives (-3;2) et (4;7) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont donc (7;5).
En effet : $x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 4 - (-3) = 4 + 3 = 7$ et $y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 7 - 2 = 5$.

V – Somme de deux vecteurs et relation de Chasles

V.1 - Somme de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et M un point . La translation de vecteur $\vec{u}$ transforme M en un point N et la translation de vecteur $\vec{v}$ transforme N en un point P. Alors la translation qui transforme M en P est dite translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$. D'où la définition suivante :

Définition : La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.



Propriété : Dans un repère, soient $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ deux vecteurs.
Alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(a+a';b+b')$.

Exemple : Soient $\vec{u}(2;-1)$ et $\vec{v}(-3;5)$.
Alors $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(2+(-3);-1+5)=(-1;4)$.
Faire un schéma illustrant cette somme de vecteurs.

On en déduit immédiatement les propriétés suivantes :

Propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. Alors :

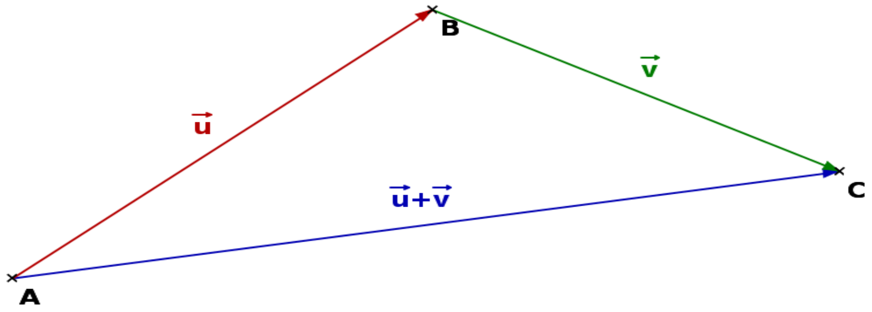
- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{v}+(\vec{u}+\vec{w})$

V.2 – Relation de Chasles

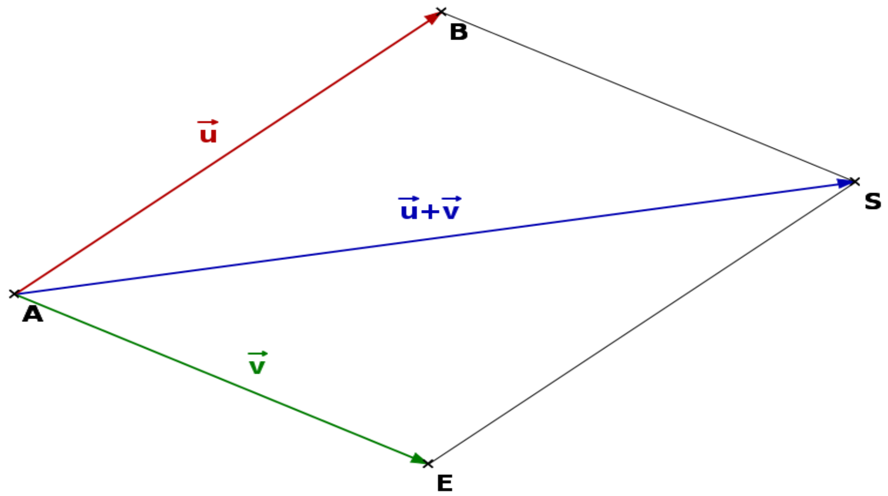
Soient A, B, C trois points du plan et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. Alors la définition de la somme de deux vecteurs fournit immédiatement la propriété suivante :

Propriété [Relation de Chasles]: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Technique : pour construire géométriquement la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à l'aide de la relation de Chasles, on dispose « bout à bout » les représentants $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ de $\vec{v}$.



Remarque : une autre construction géométrique possible de la somme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ consiste à utiliser la **règle du parallélogramme** : on choisit des représentants $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AE}$ de $\vec{v}$ de même origine A. La somme $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AS}$ où S est le 4ème sommet du parallélogramme ABSE construit sur les segments $[AB]$ et $[AE]$.



V.3 – L'opposé d'un vecteur

On peut définir l'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}=\vec{0}$. La relation de Chasles fournit alors la définition équivalente suivante :

Définition : Soient A et B deux points du plan. L'**opposé** du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $-\vec{u}$ tel que si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ alors $-\vec{u}=\overrightarrow{BA}$.
L'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est donc $\overrightarrow{BA}$ soit $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

Remarque : le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ correspond aussi au vecteur associé à la translation qui transforme B en A. On peut à présent définir la différence de deux vecteurs comme la somme du premier et de l'opposé du deuxième :

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Alors la différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

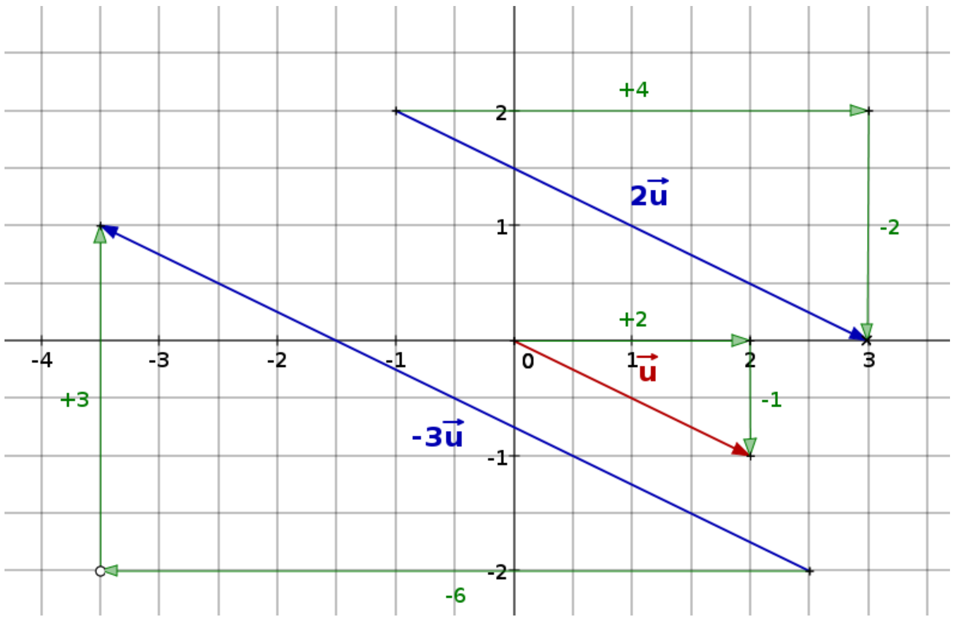
Exercice : soient A, B et C trois points du plan. Calculer $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$.

VI – Multiplication d'un vecteur par un réel et colinéarité

VI.1 – Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition : Soient k un réel et $\vec{u}(a;b)$ un vecteur dans un repère.
Alors le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(ka;kb)$ dans le même repère.

Remarque : le vecteur ainsi défini est indépendant du repère choisi.



VI.2 – Colinéarité de deux vecteurs

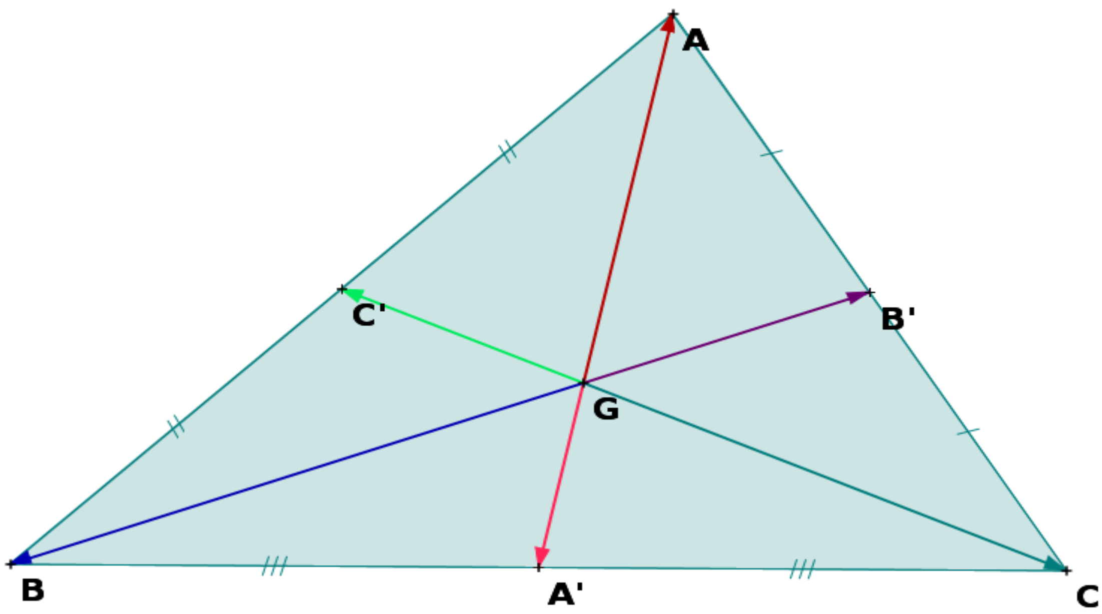
Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$

Remarque importante : le **vecteur nul** $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{v}$ car $\vec{0}=0\vec{v}$.

Exemples :

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\frac{-2}{3}\vec{u}$ sont colinéaires.
- Dire que I est le milieu de [AB] revient à dire que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$

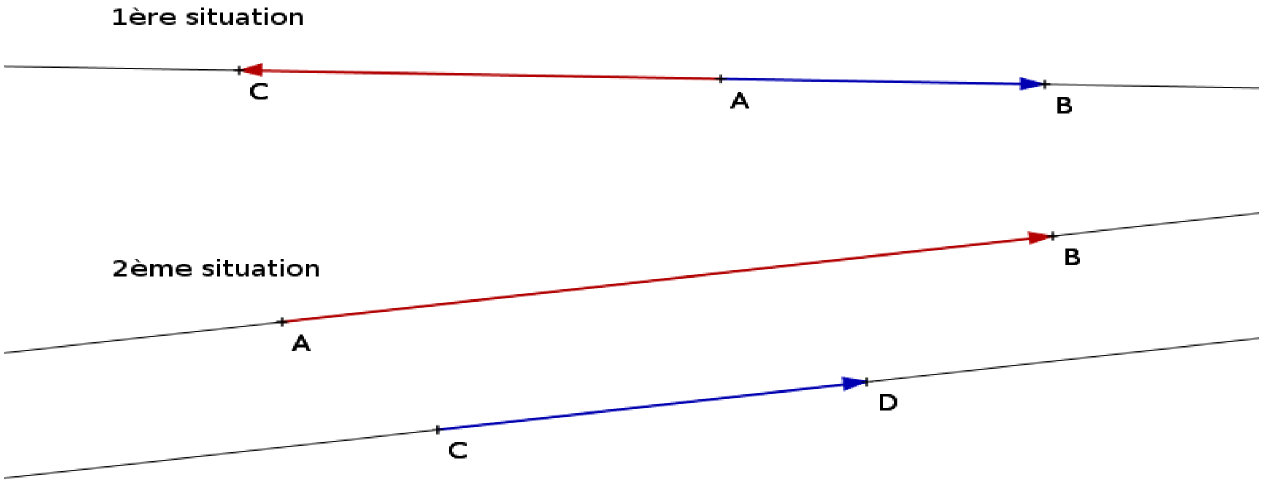
- Dans un triangle ABC la distance entre le centre de gravité G et un sommet (A par exemple) vaut les deux tiers de la médiane issue de ce sommet, et on a la relation :



$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ ou $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GA'}$. De même, $\overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GB'}$ et $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GC'}$.

Propriété : Soient A, B, C et D quatre points du plan.

- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.



VII – Bonus

VII.1 – traduction analytique de la colinéarité de deux vecteurs

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-yx'=0$.

Démonstration : reconnaître une situation de proportionnalité et faire un produit en croix.

Exemple : Les vecteurs $\vec{u}(2\,;5)$ et $\vec{v}(3\,;7{,}5)$ sont colinéaires car $xy'-yx'=2*7{,}5-5*3=0$.

VII.2 – Caractérisation d'un vecteur non nul par une direction, un sens et une longueur

Propriété : Soient A et B deux points distincts du plan. Le vecteur $\vec{AB}$, non nul, est caractérisé par :

1. sa **direction**, celle de la droite (AB),
2. son **sens**, celui de A vers B,
3. sa **longueur**, celle du segment [AB].

Vocabulaire : on appelle **norme** du vecteur $\vec{AB}$ la longueur du segment [AB].

Remarques :

- Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour norme 0, mais sa direction et son sens ne sont pas définis.
- Deux vecteurs non nuls colinéaires ont même direction, mais pas forcément le même sens ni la même longueur (ou norme).

Compétences attendues (chaque élève doit vérifier s'il a acquis ces compétences) :

1. Repérer un point du plan, placer un point du plan connaissant ses coordonnées dans un repère.
2. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
3. Calculer la distance de deux points connaissant leur coordonnées dans un repère orthonormé.
4. Connaître la notion de vecteur, de représentants de vecteur et de translation.
5. Savoir que $\vec{AB}=\vec{CD}$ équivaut à ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.
6. Savoir placer géométriquement l'image d'un point par une translation.
7. Connaître les coordonnées $(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$ du vecteur $\vec{AB}$.
8. Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs dans un repère.
9. Construire géométriquement la somme de deux vecteurs à l'aide de la relation de Chasles ou de la règle du parallélogramme.
10. Utiliser la notation $k\vec{u}$.
11. Établir la colinéarité de deux vecteurs.
12. Caractériser l'alignement de points et le parallélisme de droites par la colinéarité de vecteurs.